UMCS
UNIWERSYTET MARII CURIE-SKŁODOWSKIEJ

Weronika Paulina Woś

Zastosowanie pewnych miar niezwartości w egzystencjalnej teorii nieskończonych układów równań całkowych

Rozprawa doktorska wykonana
pod kierunkiem
prof. dra hab. Józefa Banasia
i promotora pomocniczego
dr Agnieszki Chlebowicz, prof. PRz

Lublin 2021

Spis treści

Wstęp

Równania całkowe stanowią bardzo ważną gałąź analizy nieliniowej, która znajduje liczne zastosowania w wielu różnych dziedzinach opisujących i modelujących zjawiska spotykane w tzw. świecie rzeczywistym i występujące w wielu naukach przyrodniczych, jak również w wielu dziedzinach mających charakter inżynierski i techniczny. Należałoby tutaj wymienić m.in. takie dziedziny jak mechanika, hydrodynamika, termodynamika, astronomia, fizyka matematyczna, biologia i ekonomia. Zasięg zastosowań teorii równań całkowych znacznie powiększa się szczególnie w ostatnich latach.

Ujmując rzecz z historycznego punktu widzenia należałoby tutaj wspomnieć przede wszystkim fundamentalne prace szwedzkiego matematyka I. Fredholma, który na przełomie XIX i XX wieku stworzył teorię opisującą dość głębokie fakty dotyczące tzw. liniowych równań całkowych Fredholma. Następne ważne rezultaty dotyczące liniowych równań całkowych należałoby przypisać V. Volterze, którego prace dotyczyły m.in. równań całkowych, które nazwano jego nazwiskiem.

Niewątpliwe zasługi w rozwoju teorii równań całkowych ma niemiecki matematyk A. Hammerstein, który w latach trzydziestych ubiegłego stulecia uzyskał podstawowe rezultaty [26] dotyczące nieliniowych równań całkowych zwanych równaniami Hammersteina.

Wyczerpujący przegląd rozwoju teorii równań całkowych aż do lat sześćdziesiątych XX wieku został przedstawiony w monografii [27], której autorami są wybitni matematycy rosyjscy. W monografii tej można znaleźć dane bibliograficzne dotyczące m.in. wyżej wspomnianych prekursorów teorii równań całkowych.

Warto zwrócić uwagę na bardzo istotny fakt, że równania całkowe są niejako wtórną teorią w stosunku do teorii równań różniczkowych (zwyczajnych i cząstkowych). Wiele wyników uzyskanych w teorii równań całkowych ma niewątpliwie swój początek w teorii równań różniczkowych. Kwestie te są dość obszernie omówione w czterotomowej monografii W. Pogorzelskiego [33] (por. również [32]). Z nowszych opracowań związanych z zasygnalizowaną tematyką należałoby tutaj wymienić np. [11, 17, 20].

W wielu problemach rozważanych w matematyce i jej zastosowaniach łatwo jest spotkać zagadnienia dotyczące układów równań całkowych. Większość tych zagadnień można ująć przy pomocy podobnego aparatu, jak pojedyncze równania całkowe. Jednakże sytuacja znacznie się komplikuje i staje się bardzo odmienna przy rozważaniu nieskończonych układów równań całkowych. Spowodowane jest to wieloma czynnikami związanymi głównie ze znacznym stopniem komplikacji tego zagadnienia. Mianowicie, rozwiązań nieskończonych układów równań całkowych należy poszukiwać w postaci ciągów funkcyjnych, a więc pojawia się kwestia poszukiwania odpowiedniej przestrzeni zawierającej takie ciągi oraz aparatu matematycznego, który umożliwiłby przeprowadzenie odpowiednich rozważań w takich przestrzeniach.

Warto zwrócić tutaj uwagę na pewne problemy, w których pojawiają się nieskończone układy równań całkowych. Do takich problemów należy niewątpliwie zaliczyć proces tzw. semidyskretyzacji stosowany przy znajdywaniu rozwiązań pewnych typów równań różniczkowych cząstkowych (por. [20, 21]). Warto również wspomnieć o tym, że w ostatnich latach nieskończone układy równań całkowych pojawiły się w związku z rozważaniami dotyczącymi zagadnień brzegowych dla nieskończonych układów równań różniczkowych [12, 30].

Jednakże teoria nieskończonych układów równań całkowych jest niewątpliwie teorią bardzo młodą, której rozwój rozpoczął się względnie niedawno. Do tej pory pojawiło się stosunkowo niewiele prac poświęconych tematyce nieskończonych układów równań całkowych (por. [5, 8, 9, 13, 14, 19]). Okazuje się, że tematyka związana z nieskończonymi układami równań całkowych jest dość trudna i wymaga pokonania wielu trudności.

Niniejsza rozprawa doktorska jest poświęcona głównie tematyce nieskończonych układów równań całkowych. Celem pracy jest zbadanie warunków wystarczających dla rozwiązalności takich układów w klasie ciągów funkcyjnych określonych na półprostej rzeczywistej $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ i takich, że dla dowolnie ustalonej liczby z tej półosi otrzymujemy ciąg liczbowy ograniczony. Okazuje się, że zagadnienie takie jest rozpatrywane po raz pierwszy w dwóch pracach [6, 15], które dopiero co zostały opublikowane i na których opiera się niniejsza rozprawa doktorska.

Dla realizacji wspomnianego wyżej celu stworzony został odpowiedni aparat matematyczny bazujący na pojęciu miary niezwartości. Ujmując rzecz precyzyjniej, w przedkładanej pracy skonstruowano odpowiednie miary niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ złożonej z funkcji określonych na półprostej $\mathbb{R}_+$, o wartościach w zadanej przestrzeni Banacha E. O funkcjach tych zakłada się dodatkowo, że są ciągłe i ograniczone na $\mathbb{R}_+$.

Miary niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ zostały po raz pierwszy skonstruowane we wspomnianych wyżej pracach [6, 15] i okazały się być dość wygodnym narzędziem do badania istnienia rozwiązań nieskończonych układów równań całkowych ogólnej postaci. Konstrukcja tych miar niezwartości bazuje na tym, że w przestrzeni Banacha E zadana jest a priori pewna, dowolna miara niezwartości (zdefiniowana aksjomatycznie).

Należałoby tutaj wspomnieć, że poprzednio opublikowane prace związane z tematyką nieskończonych układów równań całkowych, dotyczyły nieskończonych układów równań całkowych na przedziale ograniczonym $[0, T]$. Zaledwie jedna praca [5] podejmowała tematykę istnienia rozwiązań nieskończonych układów równań całkowych w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$, ale przy założeniu, że w przestrzeni Banacha E zadana jest tzw. regularna miara niezwartości, która jest dodatkowo równoważna bardzo wygodnej mierze niezwartości Hausdorffa. Okazuje się, że w takiej sytuacji można w dość prosty sposób skonstruować miarę niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$, która jest wygodna w stosowaniu. Niestety w wielu przestrzeniach Banacha regularne miary niezwartości, równoważne mierze Hausdorffa nie istnieją. Niniejsza rozprawa doktorska poświęcona jest właśnie miarom niezwartości i nieskończonym układom równań całkowych w takich właśnie przestrzeniach $BC(\mathbb{R}_+, E)$.

Przedkładana rozprawa doktorska składa się, poza Wstępem, z pięciu rozdziałów. Rozdziały 1 i 2 zawierają fakty pomocnicze wykorzystywane w dalszym ciągu rozprawy. W szczególności Rozdział 2 omawia znaną już w literaturze przedmiotu teorię miar niezwartości Kuratowskiego, Hausdorffa oraz miary zdefiniowane aksjomatycznie, jak również wiele faktów dotyczących tej teorii.

Rozdział 3, mający również charakter pomocniczy, zajmuje się miarami niezwartości w przestrzeni $BC([0, T], E)$ przy założeniu, że w E zadana jest dowolna miara niezwartości zdefiniowana aksjomatycznie. Ponadto, w tym rozdziale omówione są miary niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ skonstruowane przy założeniu, że w przestrzeni Banacha E zadana jest regularna miara niezwartości równoważna mierze Hausdorffa. Wykorzystane tutaj zostały rezultaty pracy [5].

Zasadnicze rezultaty pracy doktorskiej, wspomniane poprzednio, zostały przedstawione i omówione w Rozdziałach 4 i 5. Rezultaty te dotyczą konstrukcji miar niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ przy założeniu, że w przestrzeni E zadana jest miara niezwartości zdefiniowana aksjomatycznie. W tych rozdziałach znajdują się również twierdzenia o istnieniu rozwiązań nieskończonych układów równań całkowych, które należą do przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ (konkretnie do przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$). Odpowiednie przykłady ilustrują przedstawione rezultaty. Jak już wcześniej zostało wspomniane, rezultaty przedstawione w Rozdziałach 4 i 5 opierają się na wynikach prac [6, 15].

1 Preliminaria

W tej pracy będą używane standardowe oznaczenia. Mianowicie, przez symbol $\mathbb{R}$ będzie oznaczany zbiór liczb rzeczywistych, podczas gdy $\mathbb{N}$ prezentuje zbiór liczb naturalnych. Ponadto oznaczono $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

Podstawowym obiektem rozważanym w pracy będzie przestrzeń Banacha E z normą $\|\cdot\|_E$. W niektórych sytuacjach norma będzie oznaczana przez $\|\cdot\|$. Element zerowy przestrzeni E będzie oznaczony przez θ.

W tej pracy będziemy zajmować się przestrzeniami Banacha nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ mimo, że większość rozważanych tutaj pojęć ma sens w zespolonej przestrzeni Banacha, a nawet w przestrzeni metrycznej.

Przez $B(x,r)$ $\big(\overline{B}(x,r)\big)$ będzie oznaczona kula otwarta (domknięta) o środku w x i promieniu r. Symbol B_r będzie używany, aby oznaczyć kulę $B(\theta, r)$, oraz analogicznie symbol $\overline{B}_r$ będzie stosowany zamiast $\overline{B}(\theta, r)$.

Jeżeli X, Y są podzbiorami przestrzeni Banacha E, wtedy będą używane standardowe symbole $X + Y$, λX $(\lambda \in \mathbb{R})$, aby oznaczyć operacje algebraiczne na podzbiorach E. Działania te są zdefiniowane następująco

$$X + Y = \big\{x + y : x \in X, y \in Y\big\}, \quad \lambda X = \big\{\lambda x : x \in X\big\}.$$

Przez $\overline{X}$ oznaczono domknięcie zbioru X. Symbol $\mathrm{conv}X$ będzie używany do oznaczenia otoczki wypukłej zbioru X, czyli zbioru wszystkich wypukłych kombinacji elementów zbioru X. Z kolei symbolem $\mathrm{Conv}\, X$ oznaczono domkniętą otoczkę wypukłą zbioru X, to jest najmniejszy w sensie inkluzji zbiór wypukły i domknięty zawierający X. Inaczej mówiąc jest to domknięcie zbioru wszystkich wypukłych kombinacji elementów zbioru X, czyli $\mathrm{Conv}X = \overline{\mathrm{conv}X}$.

Symbol $\|X\|_E$ będzie oznaczał normę zbioru X, tzn.

$$\|X\|_E = \sup\big\{\|x\|_E : x \in X\big\}.$$

Przy założeniu, że zbiór X jest niepusty i ograniczony w przestrzeni E, średnica zbioru X będzie oznaczona przez $\mathrm{diam}\, X$.

Jeżeli (E, d) jest przestrzenią metryczną, X dowolnym niepustym podzbiorem przestrzeni E, a $x \in E$, to symbol $\mathrm{dist}(x, X)$ będzie oznaczał odległość punktu od zbioru, określoną wzorem

$$\operatorname{dist}(x, X) = \inf \{d(x, y) : y \in X\}.$$

Z kolei symbol $B(X, r)$ będzie oznaczał kulę otwartą o środku w zbiorze X i promieniu r, określoną wzorem

$$B(X, r) = \{x \in E : \operatorname{dist}(x, X) < r\}.$$

Ponadto, zachodzi zależność

$$B(X, r) = X + B_r = X + rB_1.$$

Dalej, przez $\mathfrak{M}_E$ oznaczono rodzinę wszystkich niepustych i ograniczonych podzbiorów przestrzeni E, a przez $\mathfrak{N}_E$ jej podrodzinę składającą się ze wszystkich zbiorów relatywnie zwartych. Z kolei symbol $\mathfrak{M}_E^c$ niech oznacza rodzinę złożoną z tych zbiorów z rodziny $\mathfrak{M}_E$, które są domknięte.

Dalej, niech $X, Y \in \mathfrak{M}_E$. Symbol $d(X, Y)$ oznaczać będzie niesymetryczną odległość Hausdorffa pomiędzy X, a Y, wyrażoną wzorem

$$d(X, Y) = \inf \{r : X \subset B(Y, r)\}.$$

Wielkość $d(X, Y)$ jest dobrze określona nawet jeśli zbiór Y nie jest elementem rodziny $\mathfrak{M}_E$, lecz jest niepusty.

Z kolei symetryczna odległość Hausdorffa między zbiorami X oraz Y będzie oznaczona symbolem $D(X, Y)$, gdzie

$$D(X, Y) = \max \{d(X, Y),\, d(Y, X)\}.$$

Warto zauważyć, że symetryczna odległość Hausdorffa jest pseudometryką na rodzinie $\mathfrak{M}_E$, oraz jest metryką na rodzinie $\mathfrak{M}_E^c$. Co więcej jest to metryka zupełna [29].

Jeżeli $\mathcal{Z}$ jest rodziną zbiorów przestrzeni E, to symbol $\operatorname{dist}(X, \mathcal{Z})$ oznaczał będzie odległość Hausdorffa zbioru X od rodziny $\mathcal{Z}$. Jest ona dana wzorem

$$\operatorname{dist}(X, \mathcal{Z}) = \inf \{D(X, Z) : Z \in \mathcal{Z}\}.$$

W dalszej części tej pracy zostanie wykorzystanych kilka twierdzeń pomocniczych. Wśród nich znajduje się bardzo ważne twierdzenie o punkcie stałym typu Darbo [7, 18].

Twierdzenie 1.1. *Niech μ będzie ustaloną miarą niezwartości w przestrzeni Banacha E. Załóżmy, że Ω jest niepustym, ograniczonym, domkniętym i wypukłym podzbiorem przestrzeni E oraz $Q : \Omega \to \Omega$ jest ciągłym operatorem takim, że istnieje stała $k \in [0, 1)$ dla której $\mu(QX) \leqslant k\mu(X)$ dla dowolnego niepustego podzbioru X zbioru Ω. Wtedy istnieje co najmniej jeden punkt stały operatora Q w zbiorze Ω.*

Uwaga 1.2. Można pokazać, że zbiór $\operatorname{Fix} Q$ wszystkich punktów stałych operatora Q należących do zbioru Ω jest elementem jądra $\ker \mu$ (por. [7]).

Ta prosta obserwacja jest bardzo istotna w charakteryzacji rozwiązań rozważanego układu równań operatorowych (całkowych), których istnienie udowodniono w tej pracy z pomocą Twierdzenia 1.1.

Lemat 1.3. *Niech A będzie gęstym podzbiorem przestrzeni metrycznej E. Ponadto niech f będzie odwzorowaniem zbioru A w przestrzeń metryczną E'. Ciągłe odwzorowanie $\overline{f} : E \to E'$ takie, że $\overline{f}(x) = f(x)$ dla $x \in A$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in E$ istnieje granica $\lim\limits_{y \to x,\, y \in A} f(y)$ w przestrzeni E'. Odwzorowanie $\overline{f}$ jest wyznaczone jednoznacznie.*

Lemat 1.4. *Niech f będzie odwzorowaniem przestrzeni metrycznej E w zupełną przestrzeń metryczną E'. Granica $\lim\limits_{y \to x,\, y \in A} f(y)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy wahanie (oscylacja) odwzorowania f w punkcie x względem A wynosi* 0.

Twierdzenie 1.5. *[Twierdzenie o rozszerzeniu funkcji [22]] Niech A będzie gęstym podzbiorem przestrzeni metrycznej E. Ponadto niech f będzie jednostajnie ciągłym odwzorowaniem ze zbioru A w zupełną przestrzeń metryczną E'. Wtedy istnieje odwzorowanie ciągłe $\overline{f}$ z przestrzeni E w przestrzeń E' takie, że $\overline{f}(x) = f(x)$ dla $x \in A$. Co więcej odwzorowanie $\overline{f}$ jest jednostajnie ciągłe.*

Dowód. Korzystając z Lematu 1.3, oraz Lematu 1.4, aby udowodnić istnienie $\overline{f}$, należy wykazać, że wahanie (oscylacja) odwzorowania f w dowolnym punkcie $x \in E$ względem A wynosi 0.

Z założenia o jednostajnej ciągłości odwzorowania f wynika, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla wszystkich $y, z \in A$ takich, że $d(y, z) \leqslant \delta$ zachodzi $d'(f(y), d(z)) \leqslant \varepsilon/3$. Rozważmy dowolny punkt $x \in E$, oraz otoczenie tego punktu $B(x, \delta/2)$. Wtedy dla wszystkich punktów $y, z \in B(x, \delta/2)$ zachodzi, że $d(y, z) \leqslant d(y, x) + d(x, z) \leqslant \delta/2 + \delta/2 = \delta$, a wtedy $d'(f(y), d(z)) \leqslant \varepsilon/3$. Zatem dla każdego $x \in E$ średnica zbioru $f(A \cap B(x, \delta/2))$ wynosi co najwyżej $\varepsilon/3$, co pokazuje, że spełnione jest założenie.

Rozważmy następnie dowolne punkty $s, t \in E$ takie, że $d(s, t) \leqslant \delta/2$. Wtedy z Lematu 1.3 wyciągamy wniosek, że istnieje punkt $y \in A$ taki, że $d(s, y) \leqslant \delta/4$ oraz $d'(\overline{f}(s), f(y)) \leqslant \varepsilon/3$, oraz istnieje punkt $z \in A$ taki, że $d(t, z) \leqslant \delta/4$ oraz $d'(\overline{f}(t), f(z)) \leqslant \varepsilon/3$. Z nierówości trójkąta mamy

$$d(y, z) \leqslant d(y, s) + d(s, t) + d(t, z) \leqslant \delta/4 + \delta/2 + \delta/4 = \delta.$$

Z tego, że $y, z \in A$ oraz $d(y, z) \leqslant \delta$ mamy, że $d'(f(y), f(z)) \leqslant \varepsilon/3$.
Ostatecznie

$$\begin{aligned} d'(\overline{f}(s), \overline{f}(t)) &\leqslant d'(\overline{f}(s), f(y)) + d'(f(y), f(z)) \\ &+ d'(f(z), \overline{f}(t)) \leqslant \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

To dowodzi, że $\overline{f}$ jest jednostajnie ciągła. $\square$

2 Miary niezwartości - teoria ogólna

Ten rozdział przedstawia klasyczne miary niezwartości, to jest miarę Kuratowskiego i miarę Hausdorffa. Omówione zostaną ich własności i zależności między nimi. Zostanie wprowadzona ponadto aksjomatyczna definicja pojęcia miary niezwartości, a także omówione będą własności takich miar.

2.1 Klasyczne miary niezwartości

Z historycznego punktu widzenia pierwszą miarę niezwartości zdefiniował w latach trzydziestych ubiegłego stulecia polski matematyk, profesor Kazimierz Kuratowski [28].

Mianowicie, jeżeli (M, d) jest zadaną przestrzenią metryczną zupełną, a X jest niepustym i ograniczonym podzbiorem przestrzeni M, to miarę niezwartości Kuratowskiego definiuje się w następujący sposób

$$\begin{aligned}\alpha(X) = \inf\{\varepsilon > 0 : X &\text{ może być pokryty skończoną rodziną zbiorów} \\ &X_1, X_2, \ldots, X_m \text{ takich, że } \operatorname{diam} X_i \leqslant \varepsilon \ \text{ dla } \ i = 1, 2, \ldots, m\}.\end{aligned}$$

Prawdą jest, że $\alpha(X) \geqslant 0$ dla każdego niepustego i ograniczonego podzbioru X przestrzeni M. Ponadto z definicji wynika, że

$$\alpha(X) \leqslant \operatorname{diam} X,$$

gdzie symbol $\operatorname{diam} X$ oznacza średnicę zbioru X.

Funkcja α jest ponadto monotoniczna ze względu na relację inkluzji, tzn. ma miejsce następująca implikacja

$$X \subset Y \Rightarrow \alpha(X) \leqslant \alpha(Y) \tag{2.1}$$

dla dowolnych podzbiorów niepustych i ograniczonych X, Y przestrzeni M.
Ponadto zachodzi następująca równoważność

$$\alpha(X) = 0 \Leftrightarrow X \text{ jest relatywnie zwarty.} \tag{2.2}$$

Udowodniona zostanie teraz jeszcze jedna własność funkcji α. Niech jak poprzednio (M, d) oznacza dowolną przestrzeń metryczną zupełną.

Lemat 2.1.1. *Dla dowolnych $X, Y \in \mathfrak{M}_M$ ma miejsce równość*

$$\alpha(X \cup Y) = \max\{\alpha(X), \alpha(Y)\}.$$

Dowód. Ponieważ $X \subset X \cup Y$ oraz $Y \subset X \cup Y$, zatem z (2.1) mamy

$$\max\{\alpha(X), \alpha(Y)\} \leqslant \alpha(X \cup Y). \tag{2.3}$$

Dla dowodu nierówności odwrotnej załóżmy, że $\max\{\alpha(X), \alpha(Y)\} = \alpha(X) = r$, $r \geqslant 0$. Wtedy zgodnie z definicją funkcji α, dla dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$, zbiór X można pokryć skończoną liczbą zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_k$ takich, że $\operatorname{diam} A_i < r + \varepsilon$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Ponieważ $\alpha(Y) \leqslant r$, więc również zbiór Y można pokryć skończoną liczbą zbiorów $A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots, A_n$ takich, że $\operatorname{diam} A_i < r + \varepsilon$ dla $i = k+1, k+2, \ldots, n$. Oznacza to, że

$$\alpha(X \cup Y) \leqslant r + \varepsilon.$$

Stąd, wobec dowolności liczby $\varepsilon > 0$ wnioskujemy, że

$$\alpha(X \cup Y) \leqslant r = \max\{\alpha(X), \alpha(Y)\}.$$

Powyższa nierówność w połączeniu z (2.3) kończy dowód. □

Najistotniejszą własnością miary niezwartości α jest uogólnione twierdzenie Cantora. Profesor Kazimierz Kuratowski udowodnił je w 1930 roku.

Twierdzenie 2.1.2. *Niech (M, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną. Niech ponadto (X_n) będzie ciągiem zbiorów niepustych, ograniczonych i domkniętych przestrzeni M. Jeżeli (X_n) jest ciągiem zstępującym, tzn. $X_{n+1} \subset X_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$, oraz takim, że $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha(X_n) = 0$, to wtedy przecięcie ciągu (X_n), tzn. zbiór $X_\infty = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ jest niepusty.*

Dowód. Dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n wybierzmy ze zbioru X_n dowolny punkt x_n. Rozważmy zbiór $\{x_1, x_2, \ldots\}$ złożony ze wszystkich takich punktów. Z faktu, że ciąg (X_n) jest zstępujący wynika, że dla dowolnie ustalonej liczby $n \in \mathbb{N}$ mamy, że

$$\{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \subset X_n. \tag{2.4}$$

Ustalmy teraz dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$. Wtedy, z założenia, znajdziemy liczbę naturalną n taką, że $\alpha(X_n) \leqslant \varepsilon$. Dalej korzystając z (2.2), (2.4) oraz Lematu 2.1.1 oraz faktu, że zbiór skończony w przestrzeni metrycznej jest zbiorem zwartym, dostaje się nierówność

$$\begin{aligned}
&\alpha\big(\{x_1, x_2, \dots\}\big) = \alpha\big(\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\} \cup \{x_n, x_{n+1}, \dots\}\big) \\
&= \max\Big\{\alpha\big(\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}\big),\ \alpha\big(\{x_n, x_{n+1}, \dots\}\big)\Big\} \\
&= \alpha\big(\{x_n, x_{n+1}, \dots\}\big) \leqslant \alpha(X_n) \leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

Stąd, wobec dowolności liczby $\varepsilon > 0$ wynika, że

$$\alpha\big(\{x_1, x_2, \dots\}\big) = 0,$$

a to oznacza, że zbiór $\{x_1, x_2, \dots\}$ jest relatywnie zwarty. Zatem z ciągu $\{x_n\} = \{x_1, x_2, \dots\}$ można wybrać podciąg $\{x_{k_n}\} = \{x_{k_1}, x_{k_2}, \dots\}$ zbieżny do pewnego punktu $x \in M$.
Ponieważ $k_n \geqslant n$ dla $n = 1, 2, \dots$, więc korzystając z faktu, że ciąg zbiorów (X_n) jest zstępujący wnioskujemy, że

$$\{x_{k_n}, x_{k_{n+1}}, x_{k_{n+2}}, \dots\} \subset X_n.$$

Wobec domkniętości zbioru X_n oznacza to, że $x \in X_n$. Zatem mając na uwadze dowolność liczby naturalnej n wnioskujemy, że $x \in X_n$ dla $n = 1, 2, \dots$. Stąd wynika, że $x \in X_\infty$, a to oznacza, że zbiór X_∞ jest niepusty.
Koniec dowodu. $\square$

W latach 70-tych i 80-tych ubiegłego stulecia powstało dość duże zainteresowanie zarówno miarą niezwartości Kuratowskiego, jak i pewnymi uogólnieniami, czy też innymi wariantami tej miary. Na szczególną uwagę zasługuje zdefiniowana pod koniec lat 60-tych XX wieku, w pracach [24, 25], funkcja χ zwana miarą niezwartości Hausdorffa. Funkcja ta jest określona na rodzinie $\mathfrak{M}_M$ w następujący sposób

$$\chi(X) = \inf\{\varepsilon > 0 : X \text{ ma skończoną } \varepsilon - \text{sieć w } M\}. \tag{2.5}$$

Wykazane zostanie teraz, że miary α Kuratowskiego i χ Hausdorffa są równoważne. W tym celu przyjęto następującą definicję równoważności miar.

Definicja 2.1.3. Miary μ_1, μ_2 w przestrzeni M są równoważne, gdy istnieją stałe dodatnie c_1, c_2 takie, że

$$c_1\mu_1(X) \leqslant \mu_2(X) \leqslant c_2\mu_1(X),$$

dla wszystkich zbiorów $X \subset M$.

Lemat 2.1.4. *Miary niezwartości Kuratowskiego α oraz Hausdorffa χ są równoważne.*

Dowód. Jeżeli definicja (2.5) zostanie zapisana w postaci

$$\chi(X) = \inf\Bigg\{\varepsilon > 0 : \text{istnieje skończony zbiór}$$
$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset M \text{ taki, że } X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)\Bigg\},$$

to biorąc pod uwagę fakt, że $\operatorname{diam} B(y, r) \leqslant 2r$ dostajemy, że

$$\alpha(X) \leqslant 2\chi(X).$$

Z kolei ponieważ każdy zbiór A o średnicy równej d zawiera się w kuli o środku w dowolnym punkcie zbioru A i promieniu równym d, zatem mamy

$$\chi(X) \leqslant \alpha(X).$$

Z powyższych dwóch nierówności otrzymujemy następujące oszacowanie

$$\chi(X) \leqslant \alpha(X) \leqslant 2\chi(X), \tag{2.6}$$

dla dowolnego zbioru $X \in \mathfrak{M}_M$. Oznacza to, że miary niezwartości Kuratowskiego i Hausdrorffa są równoważne. □

Ponadto zachodzi zależność analogiczna jak w (2.2), tzn.

$$\chi(X) = 0 \Leftrightarrow X \text{ jest relatywnie zwarty.}$$

Miara niezwartości Hausdorffa χ jest również monotoniczna ze względu na relację zawierania, tzn.

$$X \subset Y \Rightarrow \chi(X) \leqslant \chi(Y)$$

dla dowolnych zbiorów $X, Y \in \mathfrak{M}_M$.
Miara ta ma również własność maksimum, co oznacza, że

$$\chi(X \cup Y) = \max\{\chi(X), \chi(Y)\}$$

dla dowolnych zbiorów $X, Y \in \mathfrak{M}_M$.

Bardzo ważną obserwacją jest to, że miarę niezwartości Hausdorffa χ można wyrazić jako odległość Hausdorffa zbioru X od rodziny $\mathfrak{N}_M$ relatywnie zwartych podzbiorów przestrzeni M. Dla dowolnego zbioru $X \in \mathfrak{M}_M$ zachodzi równość

$$\chi(X) = \mathrm{dist}(X, \mathfrak{N}_M).$$

Załóżmy, że przestrzeń metryczna M jest przestrzenią Banacha. Wtedy rozważane powyżej miary niezwartości Kuratowskiego i Hausdorffa mają dodatkowe ważne i użyteczne własności związane z liniową strukturą przestrzeni Banacha. Załóżmy zatem, że $(E, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha oraz, że α, χ są odpowiednio miarami niezwartości Kuratowskiego i Hausdorffa w przestrzeni E. Wtedy dla dowolnych zbiorów $X, Y \in \mathfrak{M}_E$ oraz dla dowolnej liczby $\lambda \in \mathbb{R}$ zachodzą następujące zależności

$$\begin{aligned}
\alpha(X+Y) &\leqslant \alpha(X) + \alpha(Y),\\
\chi(X+Y) &\leqslant \chi(X) + \chi(Y),\\
\alpha(\lambda X) &= |\lambda|\, \alpha(X),\\
\chi(\lambda X) &= |\lambda|\, \chi(X).
\end{aligned}$$

Ponadto dla dowolnego zbioru $X \in \mathfrak{M}_E$ mają miejsce równości

$$\begin{aligned}
\alpha(\mathrm{Conv} X) &= \alpha(X),\\
\chi(\mathrm{Conv} X) &= \chi(X).
\end{aligned}$$

Miara niezwartości Hausdorffa χ jest bardzo istotna z punktu widzenia zastosowań. Wynika to z faktu, że w niektórych przestrzeniach Banacha można wyrazić miarę Hausdorffa χ wzorami powiązanymi ze strukturą rozważanych przestrzeni Banacha. Na przykład, w ciągowych przestrzeniach Banacha c_0, l_p $(1 \leqslant p < \infty)$

oraz w przestrzeni funkcji $C([a,b])$ znane są wzory wyrażające miarę niezwartości Hausdorffa [7, 11]. Na przykład w przestrzeni Banacha $C([a,b])$ funkcji rzeczywistych, określonych i ciągłych na przedziale $[a,b]$, wyposażonej w standardową normę supremum zachodzi zależność [7]

$$\chi(X) = \frac{1}{2}\,\omega_0(X), \tag{2.7}$$

dla każdego zbioru $X \in \mathfrak{M}_{C([a,b])}$. Wielkość $\omega_0(X)$ jest określona wzorem

$$\omega_0(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} \omega(X, \varepsilon),$$

gdzie $\omega(X,\varepsilon)$ jest tak zwanym modułem ciągłości zbioru X. Wyraża się on wzorem

$$\omega(X,\varepsilon) = \sup\big\{\omega(x,\varepsilon) : x \in X\big\},$$

gdzie

$$\omega(x,\varepsilon) = \sup\big\{|x(t) - x(s)| : t, s \in [a,b], |t-s| \leqslant \varepsilon\big\}$$

jest modułem ciągłości funkcji x, gdzie $x \in X$.

Ponadto, w przestrzeniach Banacha c i $L^p(a,b)$ znane są wzory na regularne miary niezwartości równoważne mierze Hausdorffa χ [7, 11] (por. też [1]). Warty zauważenia jest fakt, że nie są znane wzory tego typu dla miary niezwartości Kuratowskiego α [2, 7, 11]. Jednak, w wielu przestrzeniach Banacha nie są znane również wzory wyrażające miarę niezwartości Hausdorffa χ. Nawet więcej, nie można podać wzorów dla tzw. pełnych miar niezwartości [7, 11] (definicja pełnej miary niezwartości zostanie podana w następnym podrozdziale). W związku z tym, w tej pracy ograniczono się do miar niezwartości w sensie Definicji 2.2.1, które nie są pełne (por. [7, 11, 2]). W niniejszej pracy będą rozważane miary niezwartości tego typu.

2.2 Miary niezwartości w ujęciu aksjomatycznym

W tym podrozdziale zostanie wprowadzona aksjomatyczna definicja pojęcia miary niezwartości, tworząca podstawy do naszych rozważań. Ponadto, przybliżone zostaną fakty związane z teorią miary niezwartości, które są blisko powiązane z rozważaniami prowadzonymi w tej pracy.

W dalszych cześciach pracy będzie używana następująca definicji tego pojęcia w przestrzeni E (por. [7, 11]).

Definicja 2.2.1. Funkcja $\mu : \mathfrak{M}_E \to \mathbb{R}_+$ jest nazywana miarą niezwartości w przestrzeni E jeżeli spełnia następujące warunki:

(i) Rodzina $\ker \mu = \{X \in \mathfrak{M}_E : \mu(X) = 0\}$ jest niepusta i $\ker \mu \subset \mathfrak{N}_E$.

(ii) $X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \leqslant \mu(Y)$.

(iii) $\mu(\overline{X}\,) = \mu(X)$.

(iv) $\mu(\operatorname{Conv} X) = \mu(X)$.

(v) $\mu(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leqslant \lambda\mu(X) + (1-\lambda)\mu(Y)$ dla $\lambda \in [0, 1]$.

(vi) Jeżeli (X_n) jest ciągiem zbiorów domkniętych z $\mathfrak{M}_E$ takich, że $X_{n+1} \subset X_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$ i jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(X_n) = 0$, wtedy zbiór $X_\infty = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ jest niepusty.

Rodzina $\ker \mu$ występująca w warunku (i) będzie nazywana jądrem miary niezwartości μ. Warto zauważyć, że zbiór X_∞ opisany w warunku (vi) jest elementem rodziny $\ker \mu$. Jest to konsekwencją zawierania $X_\infty \subset X_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$ i warunku (ii), który implikuje nierówność $\mu(X_\infty) \leqslant \mu(X_n)$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Stąd mamy, że $\mu(X_\infty) = 0$. Zatem $X_\infty \in \ker \mu$. Ta prosta obserwacja jest bardzo istotna w zastosowaniach.

Norma zbioru $\|X\|_E = \sup\{\|x\|_E : x \in X\}$ oraz średnica zbioru $\operatorname{diam} X = \sup\{\|x - y\|_E : x, y \in X\}$ są prostymi przykładami miar niezwartości zgodnie z Definicją 2.2.1. Warunki (i)-(vi) spełniają również opisane w poprzednim podrozdziale miara Kuratowskiego α, oraz miara Hausdorffa χ. Tym samym są one miarami niezwartości według Definicji 2.2.1.

W dalszych rozważaniach załóżmy, że μ jest miarą niezwartości w przestrzeni E. Miara μ jest nazywana subliniową [7] jeżeli spełnia następujące dodatkowe warunki

(vii) $\mu(X + Y) \leqslant \mu(X) + \mu(Y)$,

($viii$) $\mu(\lambda X) = |\lambda|\mu(X)$ dla $\lambda \in \mathbb{R}$.

Jeżeli miara niezwartości μ spełnia warunek

(ix) $\mu(X \cup Y) = \max\{\mu(X), \mu(Y)\}$,

to wtedy mówi się, że μ ma własność maksimum. Wreszcie należy przypomnieć, że miara μ taka, że $\ker \mu = \mathfrak{N}_E$ jest nazywana pełną [7].

Definicja 2.2.2. Jeżeli μ jest subliniową i pełną miarą niezwartości z własnością maksimum, to μ jest nazywana miarą regularną.

Miary niezwartości α Kuratowskiego i χ Hausdorffa są regularne. Z kolei norma zbioru i średnica zbioru nie są regularne, ponieważ w szczególności nie są pełne. To znaczy, że jądra tych miar są właściwymi podzbiorami rodziny $\mathfrak{N}_E$ zbiorów relatywnie zwartych.

Lemat 2.2.3. *Załóżmy, że μ jest regularną miarą niezwartości w przestrzeni Banacha E. Wtedy dla dowolnego zbioru $X \in \mathfrak{M}_E$ prawdziwe jest oszacowanie*

$$\mu(X) \leqslant c_1 \chi(X),$$

gdzie $c_1 = \mu(B_1)$, a χ to miara niezwartości Hausdorffa.

Dowód. Ustalmy dowolnie $\varepsilon > 0$. Następnie pokryjmy zbiór X skończoną liczbą kul $B(a_k, r)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ tak aby $r < \chi(X) + \varepsilon$. Wtedy

$$\begin{aligned} \mu(X) &\leqslant \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} B(a_k, r)\right) = \max\left\{\mu(B(a_k, r)) : k = 1, 2, \ldots, n\right\} \\ &= r\mu(B(a_k, 1)) \leqslant (\chi(X) + \varepsilon)\mu(B(\theta, 1)). \end{aligned}$$

Korzystając z tego, że ε był wybrany dowolnie, uzyskuje się żądaną nierówność. Koniec dowodu. □

Stąd powstaje naturalne pytanie czy dowolna, regularna miara niezwartości μ jest równoważna mierze χ. Uwzględniając powyższą nierówność, to zagadnienie można przedstawić inaczej. Mianowicie interesujące jest czy istnieje stała $c_2 > 0$ taka, że

$$c_2\,\chi(X) \leqslant \mu(X),$$

dla każdego $X \in \mathfrak{M}_E$.

Problem ten, który do 2018 roku był otwarty, został rozwiązany przez czterech matematyków chińskich w pracy [1]. Okazuje się, że odpowiedź na to pytanie jest negatywna. W dowolnej nieskończenie wymiarowej przestrzeni Banacha E istnieje regularna miara niezwartości, która nie jest równoważna mierze Hausdorffa χ.

3 Miary niezwartości w przestrzeni funkcji ciągłych $C([0,T],E)$ oraz pewna klasa miar niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+,E)$

Ten rozdział jest poświęcony omówieniu miar niezwartości w wybranych przestrzeniach funkcyjnych Banacha. Będą to odpowiednio: przestrzeń funkcji określonych i ciągłych na $[0,T]$ o wartościach w przestrzeni Banacha E, tj. $C([0,T],E)$, przestrzeń rzeczywistych funkcji określonych, ograniczonych i ciągłych na $\mathbb{R}_+$, tj. $BC(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ oraz przestrzeń funkcji określonych, ograniczonych i ciągłych na $\mathbb{R}_+$ o wartościach w przestrzeni E, tj. $BC(\mathbb{R}_+,E)$.

3.1 Miary niezwartości w przestrzeni $C([0,T],E)$

Dla dalszych celów należy przypomnieć kilka faktów dotyczących miary niezwartości w przestrzeni Banacha $C([a,b],E)$. Załóżmy, że E jest nieskończenie wymiarową przestrzanią Banacha, a μ jest miarą niezwartości w E. Rozważmy przestrzeń Banacha $C=C([a,b],E)$ składającą się z funkcji określonych i ciągłych na przedziale $[a,b]$ o wartościach w przestrzeni E. Ta przestrzeń jest unormowana w standardowy sposób

$$\|x\|_C=\sup\big\{\|x(t)\|_E : t\in[a,b]\big\}.$$

Dla dowolnego $X\in\mathfrak{M}_C$, będzie używane oznaczenie $X(t)=\{x(t):x\in X\}$. Zbiór $X(t)$ dla ustalonego t jest podzbiorem przestrzeni E i będzie nazywany przekrojem w punkcie t.

Konstrukcja miary niezwartości w przestrzeni C jest oparta na następującym uogólnieniu twierdzenia Arzéli-Ascolego [7].

Twierdzenie 3.1.1. *Zbiór $X\in\mathfrak{M}_C$ jest relatywnie zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie funkcje należące do X są jednakowo ciągłe na przedziale $[a,b]$ i dla dowolnego $t\in[a,b]$ zbiór $X(t)$ jest relatywnie zwarty w przestrzeni E.*

Następnie, chcąc skonstruować zapowiedzianą miarę niezwartości, ustalmy dowolny zbiór $X\in\mathfrak{M}_C$. W konstrukcji miary uwzględnione zostaną dwa składniki.

Pierwszy będzie opisywał w jakim stopniu zbiór X spełnia warunek jednakowej ciągłości funkcji należących do X. Natomiast drugi składnik będzie określał zwartość przekrojów $X(t)$ w przestrzeni E.

Ustalmy zatem $\varepsilon > 0$. Dla dowolnie wybranej funkcji $x \in X$ definiujemy moduł ciągłości funkcji x poprzez

$$\omega(x, \varepsilon) = \sup \left\{ \|x(t) - x(s)\|_E : t, s \in [a, b],\ |t - s| \leqslant \varepsilon \right\}.$$

Następnie definiujemy

$$\begin{aligned} \omega(X, \varepsilon) &= \sup \left\{ \omega(x, \varepsilon) : x \in X \right\}, \\ \omega_0(X) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \omega(X, \varepsilon). \end{aligned}$$

Niech μ będzie dowolną miarą niezwartości w przestrzeni E. Użyte będzie wtedy oznaczenie

$$\overline{\mu}(X) = \sup \left\{ \mu(X(t)) :\ t \in [a, b] \right\}.$$

Ostatecznie przyjmijmy

$$\mu_I(X) = \omega_0(X) + \overline{\mu}(X), \tag{3.1}$$

gdzie oznaczenie $I = [a, b]$.

Następnie można sformułować następujące twierdzenie [7].

Twierdzenie 3.1.2. *Funkcja μ_I zdefiniowana wzorem* (3.1) *jest miarą niezwartości w przestrzeni $C = C([a, b], E)$.*

Pełny dowód tego twierdzenia można znaleźć w [7]. Ponieważ jest dość obszerny, nie będzie tutaj przytoczony.

3.2 Miary niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$

Ten podrozdział poświęcony jest omówieniu miary niezwartości w przestrzeni funkcji rzeczywistych, określonych, ciągłych i ograniczonych na dodatniej półosi rzeczywistej $\mathbb{R}_+$.

Faktem jest, że w niektórych przestrzeniach Banacha nie jest znany pełny opis rodziny zbiorów relatywnie zwartych w tych przestrzeniach. Inaczej mówiąc, nie są znane kryteria relatywnej zwartości zbiorów powiązane ze strukturą danej przestrzeni. Należy przypomnieć [7, 23], że w klasycznych przestrzeniach Banacha $C([a,b])$ oraz $L^p(a,b)$ znane są wygodne kryteria relatywnej zwartości takie jak, omówione w poprzednim podrozdziele, kryterium Arzéla-Ascoli dla $C([a,b])$ oraz kryterium Riesza-Kołmogorowa w $L^p(a,b)$ odpowiednio.

Sytuacja komplikuje się, gdy rozważa się wspomnianą przestrzeń $BC(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, tj. przestrzeń Banacha funkcji rzeczywistych, określonych, ciągłych i ograniczonych na $\mathbb{R}_+$. Przestrzeń ta będzie oznaczana krótko $BC(\mathbb{R}_+)$. Okazuje się, że w tej przestrzeni wspomniane kryterium Arzéla-Ascoli nie jest równoważnością. W związku z tym możliwe jest używanie wyłącznie warunków wystarczających dla relatywnej zwartości. Jednakże na bazie tych warunków można oprzeć konstrukcję dość wygodnej miary niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$.

Niech zatem symbol $BC(\mathbb{R}_+)$, oznacza jak już wspomniano, przestrzeń Banacha funkcji rzeczywistych $x = x(t)$, określonych, ciągłych i ograniczonych na dodatniej półosi rzeczywistej $\mathbb{R}_+$. Przestrzeń ta jest wyposażona w standardową normę supremum

$$\|x\|_{BC(\mathbb{R}_+)} = \sup\big\{|x(t)| : t \in \mathbb{R}_+\big\}.$$

Ustalmy dowolnie niepusty i ograniczony podzbiór X przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$. Wybierzmy liczby $\varepsilon > 0$, oraz $T > 0$. Ponadto ustalmy dowolnie funkcję $x \in X$. Następnie definiujemy tak zwany moduł ciągłości funkcji x na przedziale $[0,T]$, oznaczony przez $\omega^T(x,\varepsilon)$, następującym wzorem

$$\omega^T(x,\varepsilon) = \sup\big\{|x(t) - x(s)| : t, s \in [0,T], |t-s| \leqslant \varepsilon\big\}.$$

Następnie określamy

$$\omega^T(X,\varepsilon) = \big\{\omega^T(x,\varepsilon) : x \in X\big\}.$$

Wielkość ta może być traktowana jak moduł ciągłości zbioru X na przedziale $[0,T]$. Biorąc pod uwagę fakt, że funkcja $\varepsilon \to \omega^T(X,\varepsilon)$ jest niemalejąca wnioskujemy, że istnieje skończona granica $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \omega^T(X,\varepsilon)$. Zatem niech

$$\omega_0^T(X) = \lim_{\varepsilon\to 0} \omega^T(X,\varepsilon).$$

Następnie określamy wielkość $\omega_0(X)$ w następujący sposób

$$\omega_0(X) = \lim_{T\to\infty} \omega_0^T(X).$$

Warto zauważyć, że wielkość $\omega_0(X)$ nie jest miarą niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$. W celu wykazania tego stwierdzenia rozważmy zbiór $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, gdzie x_n są funkcjami z przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$ zdefiniowanymi następująco

$$x_n(t) = \begin{cases} \sin(t+n-1)\pi & \text{dla} \quad t \in [n-1, n] \\ 0 & \text{dla} \quad \mathbb{R}_+ \backslash [n-1, n]. \end{cases}$$

Zbiór X jest niepusty i ograniczony, czyli $X \in \mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+)}$. Wielkość $\omega_0(X)$ jest równa zero, ale zbiór X nie jest relatywnie zwarty w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$. Jest tak ponieważ $\|x_n - x_m\| = 1$ dla $n \neq m$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Rozważmy następnie funkcje $a(X)$, $b(X)$ oraz $c(X)$ określone na rodzinie $\mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+)}$ w następujący sposób

$$a(X) = \lim_{T\to\infty} \left\{ \sup_{x\in X} \left\{ \sup \left\{ |x(t)| : t \geqslant T \right\} \right\} \right\},$$

$$b(X) = \lim_{T\to\infty} \left\{ \sup_{x\in X} \left\{ \sup \left\{ |x(t) - x(s)| : t, s \geqslant T \right\} \right\} \right\},$$

$$c(X) = \limsup_{t\to\infty} \operatorname{diam} X(t),$$

gdzie $X(t) = \{x(t) : x \in X\}$, a symbol $\operatorname{diam} X(t)$ oznacza średnicę zbioru $X(t)$. Dalej, na rodzinie $\mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+)}$ definiujemy wielkości μ_a, μ_b, oraz μ_c następująco

$$\mu_a = \omega_0(X) + a(X), \tag{3.2}$$

$$\mu_b = \omega_0(X) + b(X), \tag{3.3}$$

$$\mu_c = \omega_0(X) + c(X). \tag{3.4}$$

Prawdziwe jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 3.2.1. *Funkcje μ_a, μ_b, oraz μ_c, określone wzorami* (3.2)-(3.4) *odpowiednio, są miarami niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$. Ponadto, dla każdego zbioru $X \in \mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+)}$ zachodzą poniższe nierówności*

$$\chi(X) \leqslant \mu_b(X), \tag{3.5}$$

$$\chi(X) \leqslant \mu_c(X), \tag{3.6}$$

$$\mu_b(X) \leqslant 2\mu_a(X), \quad \mu_c(X) \leqslant 2\mu_a(X). \tag{3.7}$$

Dowód. Podany zostanie dowód tego twierdzenia (por. [10]), ponieważ pewne idee tego dowodu są wykorzystywane w dowodach Twierdzeń 3.3.3 i 4.1.4, będących jednymi z podstawowych twierdzeń tej pracy. Najpierw wykazana zostanie nierówność (3.5). W tym celu oznaczmy $r = \mu_b(X)$, oraz $r_1 = \omega_0(X)$, $r_2 = b(X)$, $r = r_1 + r_2$. Zauważmy, że funkcja $T \to \omega_0^T$ jest niemalejąca. Zatem $\omega_0^T(X) \leqslant r_1$ dla każdego $T \geqslant 0$. Z drugiej strony, możemy znaleźć $T_0 > 0$ takie, że

$$\sup_{x\in X}\Big\{\sup\big\{|x(t)-x(s)| : t,s \geqslant T_0\big\}\Big\} \leqslant r_2 + \varepsilon, \tag{3.8}$$

gdzie $\varepsilon > 0$ jest dowolnie ustalone.

Ustalmy teraz dowolnie liczbę T, $T \geqslant T_0$ i rozważmy zbiór $X_T = \{x|_{[0,T]} : x \in X\}$, gdzie symbol $x|_{[0,T]}$ oznacza obcięcie funkcji x do przedziału $[0,T]$. Biorąc pod uwagę zależność (2.7), która wyraża miarę niezwartości Hausdorffa χ w przestrzeni $C([0,T])$ możemy znaleźć $\left(\frac{1}{2}r_1 + \varepsilon\right)$ - sieć $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m$ zbioru X_T w przestrzeni $C([0,T])$. Zatem dla dowolnego $x \in X$ istnieje $k \in \{1,2,\ldots,m\}$ takie, że

$$|x(t) - \overline{x}_k(t)| \leqslant \frac{1}{2}r_1 + \varepsilon \tag{3.9}$$

dla $t \in [0,T]$.

Rozważmy następnie rozszerzenie x_k funkcji $\overline{x}_k$ $(k = 1,2,\ldots,m)$ na cały przedział $\mathbb{R}_+$ określone w następujący sposób

$$x_k(t) = \begin{cases} \overline{x}_k(t) & \text{dla} \quad t \in [0,T] \\ \overline{x}_k(T) & \text{dla} \quad t > T. \end{cases}$$

Oczywiście $x_k \in BC(\mathbb{R}_+)$. Zauważmy następnie, że biorąc pod uwagę (3.8) oraz (3.9) dla dowolnego $t \geqslant T$ otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} |x(t) - x_k(t)| &\leqslant |x(t) - x(T)| + |x(T) - x_k(t)| \\ &\leqslant r_2 + \varepsilon + |x(T) - \overline{x}_k(T)| \leqslant r_2 + \frac{1}{2}r_1 + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Zatem otrzymujemy, że

$$|x(t) - x_k(t)| \leqslant r_1 + r_2 + 2\varepsilon = r + 2\varepsilon$$

dla każdego $t \geqslant 0$. Oznacza to, że funkcje $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ tworzą $(r + 2\varepsilon)$ - sieć zbioru X w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$. Stąd wyprowadzamy poniższe oszacowanie

$$\chi(X) \leqslant r + 2\varepsilon.$$

Ostatecznie, uwzględniając to, że ε zostało wybrane dowolnie wnioskujemy, że spełniona jest nierówność (3.5).

Aby udowodnić nierówność (3.6), podobnie jak poprzednio ustalmy $r = \mu_c(X)$, $r_1 = \omega_0(X)$, $r_2 = c(X)$, oraz $r = r_1 + r_2$. Ustalmy dowolnie $\varepsilon > 0$. Następnie wybierzmy liczbę $T > 0$ tak, żeby

$$\operatorname{diam} X(t) \leqslant r_2 + \varepsilon \tag{3.10}$$

dla $t \geqslant T$. Z drugiej strony, korzystając z wcześniejszych rozważań, wnioskujemy, że

$$\omega_0^T(X) \leqslant r_1.$$

Zatem korzystając z zależności (2.7) stwierdzamy, że istnieje $(\frac{1}{2}r_1 + \varepsilon)$ - sieć $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m$ zbioru X_T w przestrzeni $C([0, T])$.

Stosując standardowe własności przestrzeni metrycznych możemy znaleźć funkcje $y_1, y_2, \ldots, y_m \in X$ takie, że funkcje $\overline{y}_k = y_k|_{[0,T]}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ tworzą $(r_1 + 2\varepsilon)$ - sieć zbioru X_T.

Teraz ustalmy dowolnie funkcję $x \in X$. Możemy znaleźć $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ takie, że

$$|x(t) - \overline{y}_k(t)| \leqslant r_1 + 2\varepsilon$$

dla $t \in [0, T]$. Równoważnie możemy napisać, że

$$|x(t) - y_k(t)| \leqslant r_1 + 2\varepsilon \tag{3.11}$$

dla $t \in [0, T]$.

Następnie, biorąc dowolną liczbę $t \geqslant T$, na podstawie (3.10) otrzymujemy, że

$$|x(t) - y_k(t)| \leqslant \operatorname{diam} X(t) \leqslant r_2 + \varepsilon. \tag{3.12}$$

Łącząc zależności (3.11) oraz (3.12), dla $t \in \mathbb{R}_+$ mamy, że

$$|x(t) - y_k(t)| \leqslant \max\{r_1, r_2\} + 2\varepsilon \leqslant r_1 + r_2 + 2\varepsilon = r + 2\varepsilon.$$

To pozwala nam stwierdzić, że funkcje $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ tworzą $(r+2\varepsilon)$ - sieć zbioru X. Ponieważ liczba ε została wybrana dowolnie, zatem nierówność (3.6) jest spełniona.

Zauważmy, że z prostej nierówności

$$|x(t) - x(s)| \leqslant |x(t)| + |x(s)|, \; t, s \in \mathbb{R}_+$$

wynikają wprost nierówności (3.7).

Uwzględniając wykazane nierówności (3.5)-(3.7) stwierdzamy, że funkcje μ_a, μ_b oraz μ_c spełniają aksjomaty (i) oraz (vi) Definicji 2.2.1. Dowody dla aksjomatów (ii)-(v) pomijamy.

Koniec dowodu. $\square$

Warto wspomnieć, że miary niezwartości μ_a oraz μ_b określone wzorami (3.2) oraz (3.3) są subliniowe i mają własność maksimum. Z kolei miara μ_c określona przez (3.4) nie ma własności maksimum, chociaż też jest subliniowa. Wszystkie te trzy miary niezwartości nie są regularne. To stwierdzenie jest konsekwencją podanego niżej opisu ich jąder.

Zauważmy zatem, że jądro $\ker \mu_a$ składa się ze wszystkich ograniczonych podzbiorów X przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$ takich, że funkcje ze zbioru X są lokalnie jednakowo ciągłe na $\mathbb{R}_+$ i dążą do zera w nieskończoności z tą samą prędkością (tzn. jednostajnie ze względu na zbiór X). Podobnie, jądro $\ker \mu_b$ zawiera ograniczone podzbiory X takie, że funkcje z X są lokalnie jednakowo ciągłe na $\mathbb{R}_+$ i dążą do granicy w nieskończoności z tą samą prędkością. Wreszcie jądro $\ker \mu_c$ składa się z ograniczonych, zbiorów X takich, że funkcje należące do X są lokalnie jednakowo ciągłe na $\mathbb{R}_+$ i grubość wiązki utworzonej przez wykresy tych funkcji zmierza do zera w nieskończoności.

Zauważmy ponadto, że $\ker \mu_a \subset \ker \mu_b$ oraz $\ker \mu_a \subset \ker \mu_c$. Nie ma jednak związku zawierania między $\ker \mu_b$ a $\ker \mu_c$.

Uwaga 3.2.2. Zauważmy, że zbiór $X = \{\sin t, \cos t\}$, jako skończony, jest zwarty w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$, ale nie jest elementem żadnego z jąder $\ker \mu_a$, $\ker \mu_b$, $\ker \mu_c$. To pokazuje, że faktycznie miary te nie są regularne.

Rrozważona zostanie teraz inna miara niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$. Miara ta powiązana jest z koncepcją krańcowej monotoniczności funkcji [3].

Oznaczmy zatem przez $B(\mathbb{R}_+)$ przestrzeń funkcji rzeczywistych, określonych i ograniczonych na $\mathbb{R}_+$ (niekoniecznie ciągłych), wyposażoną w standardową normę supremum. Przestrzeń $BC(\mathbb{R}_+)$ jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni $B(\mathbb{R}_+)$.

Następnie dla danej funkcji $x \in B(\mathbb{R}_+)$, oraz dla ustalonej liczby $T > 0$ definiujemy wielkości

$$d_T(x) = \sup \big\{ |x(s) - x(t)| - [x(s) - x(t)] : T \leqslant t < s \big\},$$

$$i_T(x) = \sup \big\{ |x(s) - x(t)| - [x(t) - x(s)] : T \leqslant t < s \big\}.$$

Wielkość $d_T(x)$ jest to tak zwany moduł zmniejszania funkcji x na przedziale $[T, \infty)$, z kolei $i_T(x)$ reprezentuje moduł wzrostu x na tym samym przedziale $[T, \infty)$.

Następnie dla $X \in \mathfrak{M}_{B(\mathbb{R}_+)}$ ustalmy

$$d_T(X) = \sup \big\{ d_T(x) : x \in X \big\},$$

$$i_T(X) = \sup \big\{ i_T(x) : x \in X \big\}.$$

Funkcje $T \to d_T(x)$ oraz $T \to i_T(x)$ są nierosnące na $\mathbb{R}_+$. W związku z tym istnieją granice

$$d_\infty(x) = \lim_{T\to\infty} d_T(x),$$
$$i_\infty(x) = \lim_{T\to\infty} i_T(x).$$

Podobnie, biorąc pod uwagę, że funkcje $T \to d_T(X)$ oraz $T \to i_T(X)$ są nierosnące na $\mathbb{R}_+$ stwierdzamy, że istnieją poniższe granice

$$d_\infty(X) = \lim_{T\to\infty} d_T(X),$$

$$i_\infty(X) = \lim_{T\to\infty} i_T(X).$$

Będziemy mówić, że funkcja $x \in B(\mathbb{R}_+)$ jest krańcowo niemalejąca jeżeli $d_\infty(x) = 0$, oraz krańcowo nierosnąca jeśli $i_\infty(x) = 0$.

Faktem jest, że żadna z funkcji d_∞, czy i_∞ nie jest miarą niezwartości w przestrzeni $B(\mathbb{R}_+)$ [3]. Jednakże funkcje te mogą być użyteczne w konstrukcji miary niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$.

Prawdziwy jest poniższy lemat [3].

Lemat 3.2.3. *Niech $X \in \mathfrak{M}_{B(\mathbb{R}_+)}$ oraz niech $d_\infty(X) = 0$ lub $i_\infty(X) = 0$. Wtedy każda funkcja $x \in X$ ma skończoną granicę w nieskończoności.*

Następnie wykorzystana zostnie miara niezwartości μ_c określona wzorem (3.4). Zatem dla dowolnie ustalonego zbioru $X \in \mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+)}$ ustalmy

$$\mu_d(X) = \mu_c(X) + d_\infty(X),$$

$$\mu_i(X) = \mu_c(X) + i_\infty(X).$$

Wyżej zdefiniowane funkcje μ_d oraz μ_i są miarami niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$ w sensie Definicji 2.2.1.

Dla dowodu tego faktu trzeba skorzystać z własności funkcji d_∞ oraz i_∞, a także z nierówności

$$\mu_d(X) \geqslant \mu_c(X), \qquad \mu_i(X) \geqslant \mu_c(X),$$

które są prawdziwe dla każdego $X \in \mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+)}$.

Zauważmy ponadto, że miary μ_d, μ_i są subliniowe, ale nie mają własności maksimum. Jądro $\ker \mu_d$ składa się z ograniczonych podzbiorów X przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$ takich, że funkcje z X są lokalnie jednakowo ciągłe na $\mathbb{R}_+$, grubość wiązki utworzonej przez wykresy tych funkcji zmierza do zera w nieskończoności, oraz funkcje z X są krańcowo niemalejące na $\mathbb{R}_+$. Podobna charakteryzacja ma miejsce dla $\ker \mu_i$.

3.3 Miary niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ generowane przez regularne miary niezwartości w przestrzeni E równoważne mierze Hausdorffa

Załóżmy, że E jest dowolną, nieskończenie wymiarową przestrzenią Banacha, z normą $\|\cdot\|_E$. Następnie rozważmy przestrzeń $BC(\mathbb{R}_+, E)$ funkcji $x = x(t)$ określonych, ciągłych i ograniczonych na $\mathbb{R}_+$, o wartościach w przestrzeni E. Przestrzeń

$BC(\mathbb{R}_+, E)$ niech będzie wyposażona w standardową normę supremum $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|x\|_\infty = \sup\big\{\|x(t)\|_E : t \in \mathbb{R}_+\big\}.$$

Ponadto, dla danego $T > 0$ rozważymy przestrzeń $C_T = C([0,T], E)$ składającą się z funkcji określonych i ciągłych na przedziale $[0,T]$ o wartościach w przestrzeni E. Przestrzeń C_T również będzie wyposażona w normę supremum oznaczaną przez $\|\cdot\|_T$, gdzie $\|x\|_T = \sup\{\|x(t)\| : t \in [0,T]\}$.

Ustalmy dowolnie zbiór $X \in \mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$, oraz liczby $\varepsilon > 0$, $T > 0$. Dla dowolnej funkcji $x \in X$ określamy moduł ciągłości tej funkcji na przedziale $[0,T]$, tj. wielkość $\omega^T(x,\varepsilon)$, przyjmując

$$\omega^T(x,\varepsilon) = \sup\big\{\|x(t) - x(s)\|_E : t, s \in [0,T],\ |t-s| \leqslant \varepsilon\big\}.$$

Następnie definiujemy wartość $\omega^T(X,\varepsilon)$, jest to tak zwany moduł ciągłości zbioru X na przedziale $[0,T]$. Jest on wyrażony wzorem

$$\omega^T(X,\varepsilon) = \sup\big\{\omega^T(x,\varepsilon) : x \in X\big\}.$$

Ponieważ funkcja $\varepsilon \to \omega^T(X,\varepsilon)$ jest niemalejąca i nieujemna, zatem istnieje skończona granica $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \omega^T(X,\varepsilon)$. Przyjmijmy oznaczenie

$$\omega_0^T(X) = \lim_{\varepsilon\to 0} \omega^T(X,\varepsilon).$$

Funkcja $T \to \omega_0^T(X)$ jest niemalejąca. Ponadto dla każdego $\varepsilon > 0$ oraz $T > 0$ ma miejsce nierówność

$$\omega^T(X,\varepsilon) \leqslant 2\|X\|_{BC(\mathbb{R}_+,E)},$$

gdzie

$$\|X\|_{BC(\mathbb{R}_+,E)} = \sup_{x\in X}\Big\{\|x\|_{BC(\mathbb{R}_+,E)}\Big\} = \sup_{x\in X}\Big\{\sup\big\{\|x(t)\|_E : t \in \mathbb{R}_+\big\}\Big\}.$$

Stąd wynika, że istnieje granica $\lim\limits_{T\to\infty} \omega_0^T(X)$. Ostatecznie, niech

$$\omega_0(X) = \lim_{T\to\infty} \omega_0^T(X). \tag{3.13}$$

Lemat 3.3.1. *Wartość $\omega_0(X) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje należące do X są lokalnie jednakowo ciągłe na przedziale $\mathbb{R}_+$.*

Dowód. Niech $X \in \mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$, oraz niech funkcje zbioru X będą lokalnie jednakowo ciągłe na $\mathbb{R}_+$. Zatem spełniony jest warunek

$$\forall_{T\in\mathbb{R}_+} \forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x\in X} \forall_{s,t\in[0,T]} \left[|s-t| \leqslant \delta \Rightarrow \|x(s)-x(t)\|_E \leqslant \varepsilon\right]$$

Ustalmy dowolnie $T \in \mathbb{R}_+$, oraz $\varepsilon > 0$, a także dobierzmy δ według definicji lokalnej jednakowej ciągłości. Wtedy dla dowolnej funkcji $x \in X$, oraz dla wszystkich $s, t \in [0, T]$ takich, że $|s-t| \leqslant \delta$ zachodzi, że $\|x(s) - x(t)\|_E \leqslant \varepsilon$. Zatem

$$\omega^T(x,\delta) = \sup\left\{\|x(s)-x(t)\|_E : s,t \in [0,T], |s-t| \leqslant \delta\right\} \leqslant \varepsilon.$$

Ponieważ powyższa nierówność zachodzi dla dowolnych $x \in X$, zatem

$$\omega^T(X,\delta) = \sup\left\{\omega^T(x,\delta) : x \in X\right\} \leqslant \varepsilon.$$

Korzystając z tego, że $\omega^T(X,\delta)$ jest rosnąca dla $\delta \in \mathbb{R}_+$ mamy, że

$$\omega_0^T(X) = \lim_{\delta\to 0} \omega^T(X,\delta) \leqslant \varepsilon.$$

Ta nierówność jest spełniona dla dowolnego $T \in \mathbb{R}_+$, otrzymujemy więc

$$\omega_0(X) = \lim_{T\to\infty} \omega_0^T(X) \leqslant \varepsilon.$$

Z faktu, że $\varepsilon > 0$ było wybrane dowolnie wnioskujemy, że $\omega_0(X) = 0$.

Przeciwnie załóżmy teraz, że $\omega_0(X) = \lim_{T\to\infty} \omega_0^T(X) = 0$. Ponieważ funkcja $T \to \omega_0^T(X)$ jest niemalejąca zatem dla każdego $T \in \mathbb{R}_+$ mamy, że $\omega_0^T(X) = \lim_{\delta\to 0} \omega^T(X,\delta) = 0$. Zatem dla dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta_0 > 0$ taka, że dla $\delta \leqslant \delta_0$ prawdziwa jest nierówność

$$\omega^T(X,\delta) = \sup\{\omega^T(x,\delta) : x \in X\} \leqslant \varepsilon.$$

Stąd otrzymujemy, że dla każdego $x \in X$ spełniona jest nierówność

$$\omega^T(x,\delta) = \sup\left\{\|x(t)-x(s)\|_E : t,s \in [0,T], |t-s| \leqslant \delta\right\} \leqslant \varepsilon.$$

Ostatecznie dla wszystkich $t, s \in [0, T]$ takich, że $|t-s| \leqslant \delta$ mamy, że

$$\|x(t)-x(s)\|_E \leqslant \varepsilon,$$

co pokazuje, że funkcje należące do X są jednakowo ciągłe na $\mathbb{R}_+$. $\square$

Załóżmy dalej, że $\mu = \mu(X)$ jest daną miarą niezwartości w przestrzeni E. Dla dowolnie ustalonej liczby $t \in \mathbb{R}_+$ oznaczmy przez $X(t)$ przekrój zbioru X w punkcie t, tzn. $X(t) = \{x(t) : x \in X\}$. Tak określony zbiór jest podzbiorem przestrzeni E.

Następnie, dla ustalonego $T > 0$ oznaczmy

$$\overline{\mu}_T(X) = \sup\big\{\mu(X(t)) : t \in [0,T]\big\}. \tag{3.14}$$

Zauważmy, że funkcja $T \to \overline{\mu}_T(X)$ jest niemalejąca i ograniczona z góry. Ograniczoność tej funkcji wynika z faktu, że X jest ograniczonym podzbiorem przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ i zachodzi zależność

$$\|X(t)\|_E \leqslant \|X\|_{BC(\mathbb{R}_+,E)} < \infty$$

dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$. Możemy zatem określić następującą wielkość

$$\overline{\mu}_\infty(X) = \lim_{T\to\infty} \overline{\mu}_T(X). \tag{3.15}$$

Następnie, dla ustalonego $T > 0$ definiujemy

$$a_T(X) = \sup_{x\in X}\Big\{\sup\big\{\|x(t)\|_E : t \geqslant T\big\}\Big\}.$$

Zauważmy, że funkcja $T \to a_T(X)$ jest nierosnąca, zatem istnieje skończona granica

$$a_\infty(X) = \lim_{T\to\infty} a_T(X). \tag{3.16}$$

Dalej, dla $T > 0$ określmy wielkość

$$b_T(X) = \sup_{x\in X}\Big\{\sup\big\{\|x(t) - x(s)\| : t, s \geqslant T\big\}\Big\}.$$

Ponieważ funkcja $T \to b_T(X)$ jest nierosnąca, więc istnieje skończona granica

$$b_\infty(X) = \lim_{T\to\infty} b_T(X). \tag{3.17}$$

Następnie, dla ustalonego $t \in \mathbb{R}_+$ definiujemy

$$\operatorname{diam} X(t) = \sup\big\{\|x(t) - y(t)\|_E : x, y \in X\big\}.$$

Połóżmy dalej

$$c(X) = \limsup_{t\to\infty} \operatorname{diam} X(t). \tag{3.18}$$

Rozważmy teraz funkcje μ_a, μ_b, μ_c określone na rodzinie $\mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$ następująco

$$\mu_a(X) = \omega_0(X) + \overline{\mu}_\infty(X) + a_\infty(X), \tag{3.19}$$

$$\mu_b(X) = \omega_0(X) + \overline{\mu}_\infty(X) + b_\infty(X), \tag{3.20}$$

$$\mu_b(X) = \omega_0(X) + \overline{\mu}_\infty(X) + c(X). \tag{3.21}$$

Pokażemy, że jeżeli miara niezwartości μ w przestrzeni E jest miarą regularną, równoważną mierze Hausdorffa, to funkcje określone wzorami (3.19)-(3.21) są miarami niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$. W tym celu należy przypomnieć najpierw pewien rezultat Nussbauma [31], który zostanie wykorzystany w procesie dowodzenia.

Lemat 3.3.2. *[31] Niech $\alpha_T(X)$ oznacza miarę niezwartości Kuratowskiego w przestrzeni $C_T = C([0,T], E)$. Wtedy*

$$\max\left\{\frac{1}{2}\omega_0^T(X), \overline{\alpha}_T(X)\right\} \leqslant \alpha_T(X) \leqslant 2\,\omega_0^T(X) + \overline{\alpha}_T(X), \tag{3.22}$$

gdzie wielkość $\overline{\alpha}_T$ jest określona przez wzór (3.14).

Zauważmy, że łącząc nierówności (3.22) oraz (2.6) otrzymujemy oszacowanie

$$\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\,\omega_0^T(X) + \overline{\chi}_T(X)\right] \leqslant \chi_T(X) \leqslant 2\big[\omega_0^T(X) + \overline{\chi}_T(X)\big] \tag{3.23}$$

dla każdego $T > 0$.

Teraz zostanie sformułowane zapowiedziane twierdzenie.

Twierdzenie 3.3.3. *[5] Jeżeli μ jest miarą niezwartości Hausdorffa w przestrzeni Banacha E, tzn. $\mu = \chi_E$, to wtedy funkcje χ_a, χ_b, oraz χ_c, określone wzorami* (3.19)-(3.21) *są miarami niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$. Ponadto prawdziwe są nierówności*

$$\chi(X) \leqslant 2\chi_b(X) \tag{3.24}$$

$$\chi(X) \leqslant 4\chi_c(X) \tag{3.25}$$

$$\chi_b(X) \leqslant 2\chi_a(X), \quad \chi_c(X) \leqslant 2\chi_a(X) \tag{3.26}$$

dla dowolnego zbioru $X \in \mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$, *gdzie* χ *oznacza miarę niezwartości Hausdorffa w przestrzeni* $BC(\mathbb{R}_+, E)$.

Dowód. Wykazana zostanie najpierw nierówność (3.24). W tym celu ustalmy dowolnie zbiór $X \in \mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$ i oznaczmy $r = \chi_b(X)$. Niech $r_1 = \omega_0(X)$, $r_2 = \overline{\chi}_\infty(X)$, $r_3 = b_\infty(X)$. Oczywiście $r = r_1 + r_2 + r_3$. Korzystając z definicji (3.13) oraz (3.14) mamy

$$\omega_0^T(X) \leqslant r_1, \tag{3.27}$$

$$\overline{\chi}_T(X) \leqslant r_2 \tag{3.28}$$

dla ustalonego $T > 0$. Z drugiej strony, dla dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ uwzględniając (3.17), znajdujemy $T_0 > 0$ takie, że dla wszystkich $T \geqslant T_0$ zachodzi

$$b_T(X) \leqslant r_3 + \varepsilon.$$

Biorąc pod uwagę powyższą nierówność i definicję funkcji b_T mamy

$$\sup\left\{\|x(t) - x(s)\| : t, s \geqslant T_0\right\} \leqslant r_3 + \varepsilon \tag{3.29}$$

dla dowolnej funkcji $x \in X$.

Ustalmy dowolnie T, $T > T_0$. Wtedy uwzględniając (3.23), (3.27), oraz (3.28) otrzymujemy nierówność

$$\chi_T(X) \leqslant 2r_1 + r_2.$$

Wnioskujemy stąd, że dla dowolnie ustalonej liczby $\delta > 0$ możemy znaleźć $(2r_1 + \ r_2 + \delta)$ - sieć $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m$ zbioru X w przestrzeni $C([0,T],E)$. Oznacza to, że dla dowolnej funkcji $x \in X$ istnieje $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ takie, że

$$\|x(t) - \overline{x}_k(t)\|_E \leqslant 2r_1 + r_2 + \delta \tag{3.30}$$

dla $t \in [0, T]$.

Rozważmy teraz rozszerzenie x_k funkcji $\overline{x}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ na przedziale $\mathbb{R}_+$ określone następująco

$$x_k(t) = \begin{cases} \overline{x}_k(t) & \text{dla} \quad t \in [0,T], \\ \overline{x}_k(T) & \text{dla} \quad t > T. \end{cases}$$

Funkcja $x_k \in BC(\mathbb{R}_+, E)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Dalej uwzględniając (3.29) oraz (3.30) dla dowolnego $t \geqslant T$ mamy

$$\begin{aligned}\|x(t) - x_k(t)\|_E &\leqslant \|x(t) - x(T)\|_E + \|x(T) - x_k(t)\|_E \\ &\leqslant r_3 + \varepsilon + \|x(T) - \overline{x}_k(T)\|_E \leqslant r_3 + \varepsilon + 2r_1 + r_2 + \delta \\ &\leqslant 2r_1 + 2r_2 + 2r_3 + \varepsilon + \delta \leqslant 2r + \varepsilon + \delta.\end{aligned}$$

Z powyższego oszacowania wynika, że funkcje $x_1, x_2, \ldots, x_m$ tworzą $(2r + \varepsilon + \delta)$ - sieć zbioru X w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$. W rezultacie dostajemy

$$\chi(X) \leqslant 2r + \varepsilon + \delta.$$

Biorąc pod uwagę dowolność liczb ε oraz δ otrzymujemy

$$\chi(X) \leqslant 2\chi_b(X),$$

co dowodzi (3.24).

Aby udowodnić nierówność (3.25), podobnie jak poprzednio, ustalmy $r = \chi_c(X)$, $r_1 = \omega_0(X)$, $r_2 = \overline{\chi}_\infty(X)$, $r_3 = c(X)$, $r = r_1 + r_2 + r_3$. Następnie ustalmy dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$. Wtedy, znajdujemy liczbę $T_0 > 0$ taką, że dla $t \geqslant T_0$ spełniona jest nierówność

$$\operatorname{diam} X(t) \leqslant r_3 + \varepsilon. \tag{3.31}$$

Dedukując jak poprzednio stwierdzamy ponadto, że dla dowolnie ustalonego $T \geqslant T_0$, zbiór X rozważony w przestrzeni $C([0, T], E)$, tzn. zbiór

$$\overline{X}_T = \{x|_{[0,T]} : x \in X\},$$

ma dla dowolnego $\delta > 0$ skończoną $(2r_1 + r_2 + \delta)$ - sieć złożoną z funkcji $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m$ należących do przestrzeni $C([0, T], E)$.

Wybierzmy następnie dowolne funkcje $y_1, y_2, \ldots, y_m \in X$ takie, że dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ nierówność

$$\|y_i(t) - \overline{x}_i(t)\|_E \leqslant 2r_1 + r_2 + \delta \tag{3.32}$$

jest spełniona dla $t \in [0, T]$.

Ustalmy dalej dowolną funkcję $x \in X$. Następnie znajdźmy $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ takie, że

$$\|x(t) - \overline{x}_i(t)\|_E \leqslant 2r_1 + r_2 + \delta \tag{3.33}$$

dla dowolnego $t \in [0, T]$. Następnie uwzględniając (3.32) oraz (3.33) mamy, że

$$\|x(t) - y_i(t)\|_E \leqslant \|x(t) - \overline{x}_i(t)\|_E + \|\overline{x}_i(t) - y(t)\|_E \leqslant 2(2r_1 + r_2) + 2\delta \tag{3.34}$$

dla dowolnego $t \in [0, T]$.

Teraz, łącząc (3.31) oraz (3.34), dla dowolnej liczby $t \in \mathbb{R}_+$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|x(t) - y_i(t)\|_E &\leqslant \max\left\{2(2r_1 + r_2) + 2\delta,\ r_3 + \varepsilon\right\} \\ &\leqslant 4r_1 + 2r_2 + r_3 + \varepsilon + 2\delta \leqslant 4r + \varepsilon + \delta. \end{aligned}$$

Z powyższego oszacowania wynika, że funkcje $y_1, y_2, \ldots, y_m$ tworzą skończoną $(4r + \varepsilon + 2\delta)$ - sieć zbioru X w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$. Mamy zatem, że

$$\chi(X) \leqslant 4\chi_c(X) + \varepsilon + 2\delta.$$

Zatem, uwzględniając dowolność liczb ε oraz δ, nierówność (3.25) została wykazana.

Zauważmy teraz, że pierwsza z nierówności występująca w (3.26) jest konsekwencją nierówności $\|x(t) - x(s)\|_E \leqslant \|x(t)\|_E + \|x(s)\|_E$, która jest prawdziwa dla wszystkich liczb $t, s \in \mathbb{R}_+$. Z kolei druga nierówność w (3.26) wynika z oszacowania $\|x(t) - y(t)\|_E \leqslant \|x(t)\|_E + \|y(t)\|_E$, które spełnione jest dla wszystkich funkcji $x, y \in BC(\mathbb{R}_+, E)$ oraz dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$.

Na podstawie udowodnionych nierówności (3.24)-(3.26) można wykazać, że funkcje χ_a, χ_b, χ_c spełniają aksjomaty (i) oraz (vi) Definicji 2.2.1. Dowody prawdziwości dla pozostałych aksjomatów $(ii) - (v)$ wynikają z własności składników $\omega_0, \overline{\chi}_\infty, a_\infty, b_\infty$, oraz c. Ostatecznie stwierdzamy, że funkcje χ_a, χ_b, oraz χ_c są miarami niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$.
Koniec dowodu. □

Zauważmy, że miary χ_a, χ_b, χ_c są subliniowe. Ponadto miary χ_a, oraz χ_b mają własność maksimum. Wszystkie te miary niezwartości nie są pełne.

Jądro miary χ_a składa się z ograniczonych podzbiorów X przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ takich, że funkcje z X są lokalnie jednakowo ciągłe na $\mathbb{R}_+$ i dążą do zera z tą samą prędkością. Ponadto przekroje $X(t)$ są relatywnie zwarte w przestrzeni E dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$. Jądro miary χ_b jest analogiczne z tą różnicą, że funkcje $x \in X \in \ker \chi_b$ dążą do skończonej (niekoniecznie zerowej) granicy. Wreszcie jądro $\ker \chi_c$ składa się z tych zbiorów $X \in \mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$, dla których funkcje z X są lokalnie jednakowo ciągłe na $\mathbb{R}_+$, przekroje $X(t)$ są relatywnie zwarte w E dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$, a grubość wiązki utworzonej przez wykresy funkcji z X dąży do zera w nieskończoności.

Uwaga 3.3.4. Zauważmy, że jeżeli w konstrukcji składnika $\overline{\mu}_\infty$ wyrażonego wzorem (3.15), zamienimy miarę Hausdorffa χ, na miarę Kuratowskiego α, lub na inną dowolną regularną miarę niezwartości μ równoważną mierze Hausdorffa, to Twierdzenie 3.3.3 pozostaje prawdziwe. W konsekwencji funkcje μ_a, μ_b, μ_c określone wzorami (3.19)-(3.21) są miarami niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$.

4 Miary niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ generowane przez dowolną miarę niezwartości w przestrzeni E

W tym rozdziale zostaną przedstawione miary niezwartości skonstruowane w przestrzeni funkcji określonych, ciągłych i ograniczonych na dodatniej półosi rzeczywistej $\mathbb{R}_+$ o wartościach w przestrzeni Banacha E. Przeprowadzony będzie dowód istnienia takich miar w przypadku, gdy w E zadana jest dowolna, niekoniecznie regularna miara niezwartości. Ponadto podamy wzory opisujące zbudowane miary w przypadku, gdy E jest przestrzenią ciągów ograniczonych l_∞.

4.1 Konstrukcja miar niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ generowanych przez dowolną miarę zadaną w E

Załóżmy, że E jest daną, nieskończenie wymiarową przestrzenią Banacha, a μ jest dowolną miarą niezwartości zadaną w tej przestrzeni.
Warto nadmienić, że rozważania tego podrozdziału zachowują swój sens jeżeli przestrzeń E jest skończenie wymiarową przestrzenią Banacha.
Następnie, rozważmy przestrzeń Banacha $BC(\mathbb{R}_+, E)$ składającą się z funkcji określonych, ciągłych i ograniczonych na $\mathbb{R}_+$ o wartościach w przestrzeni E. Przestrzeń $BC(\mathbb{R}_+, E)$ będzie wyposażona w standardową normę supremum

$$\|x\|_\infty = \sup\left\{\|x(t)\|_E : t \in \mathbb{R}_+\right\},$$

gdzie symbol $\|\cdot\|_E$ oznacza normę w przestrzeni E.

Równocześnie z przestrzenią $BC(\mathbb{R}_+, E)$ będziemy rozważać przestrzeń $C_T = C([0,T], E)$, gdzie $T > 0$ jest dowolne, z normą $\|x\|_T = \sup\left\{\|x(t)\|_E : t \in [0,T]\right\}$. Ta przestrzeń była opisana w podrozdziale 3.1.

Zauważmy, że jeżeli weźmiemy funkcję $x \in BC(\mathbb{R}_+, E)$, wtedy obcięcie $x|_{[0,T]}$ funkcji x do przedziału $[0,T]$ jest elementem przestrzeni C_T.

W dalszej części ustalmy dowolny niepusty, ograniczony zbiór X, $X \subset BC(\mathbb{R}_+, E)$. Następnie, dla dowolnie ustalonej funkcji $x \in X$ i dla $\varepsilon > 0$ definiujemy moduł ciągłości $\omega^\infty(x,\varepsilon)$ w następujący sposób

$$\omega^\infty(x,\varepsilon) = \sup\left\{\|x(t)-x(s)\|_E : t,s\in\mathbb{R}_+, |t-s|\leqslant\varepsilon\right\}. \tag{4.1}$$

Poniższy lemat przedstawia związek modułu ciągłości z pojęciem jednostajnej ciągłości funkcji.

Lemat 4.1.1. *Wartość* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\omega^\infty(x,\varepsilon)$ *jest równa* 0 *wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja* $x=x(t)$ *jest jednostajnie ciągła na przedziale* $\mathbb{R}_+$.

Z drugiej strony zauważmy, że dla dowolnego $T>0$ mamy

$$\omega^T(x,\varepsilon)\leqslant\omega^\infty(x,\varepsilon), \tag{4.2}$$

gdzie $\omega^T(x,\varepsilon)$ oznacza moduł ciągłości obcięcia $x|_{[0,T]}$ w przestrzeni C_T tzn.

$$\omega^T(x,\varepsilon) = \sup\left\{\|x(t)-x(s)\|_E : t,s\in[0,T], |t-s|\leqslant\varepsilon\right\}.$$

Dodatkowo, dla dowolnej funkcji $x\in BC(\mathbb{R}_+,E)$ mamy, że $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\omega^T(x,\varepsilon)=0$ dla każdego $T>0$. Jednak w ogólności nie jest prawdą, że $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\omega^\infty(x,\varepsilon)=0$. Aby to pokazać rozważmy następujący przykład.

Przykład 4.1.2. Rozważmy przestrzeń $BC(\mathbb{R}_+)=BC(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. Weźmy funkcję $x=x(t)$ w tej przestrzeni zdefiniowaną na przedziale $[0,1]$ w ten sposób, że jej wykres jest trójkątem równoramiennym z podstawą równą przedziałowi $[0,1]$ i wysokością równą 1. Analogicznie, definiujemy funkcję x na przedziałach $[1,1+\frac{1}{2}]$, $[1+\frac{1}{2},1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}]$ itd. Wtedy, dla dowolnego $\varepsilon>0$ mamy, że $\omega^\infty(x,\varepsilon)=1$. Stąd mamy, że $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\omega^\infty(x,\varepsilon)=1$. Jednak z drugiej strony mamy, że $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\omega^T(x,\varepsilon)=0$ dla dowolnego $T>0$.

Dalej biorąc pod uwagę wzór (4.1), dla $X\in\mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$ definiujemy:

$$\begin{aligned}\omega^\infty(X,\varepsilon) &= \sup\left\{\omega^\infty(x,\varepsilon) : x\in X\right\},\\ \omega_0^\infty(X) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\omega^\infty(X,\varepsilon).\end{aligned} \tag{4.3}$$

Lemat 4.1.3. *Wartość* $\omega_0^\infty(X)$ *jest równa* 0 *wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje ze zbioru* X *są jednakowo ciągłe na* $\mathbb{R}_+$.

Pomijamy dowód tego lematu.

W dalszej części rozważmy funkcję $\overline{\mu}_\infty$ określoną na rodzinie $\mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$ wzorem

$$\overline{\mu}_\infty(X) = \lim_{T\to\infty} \overline{\mu}_T(X), \tag{4.4}$$

gdzie

$$\overline{\mu}_T(X) = \sup\big\{\mu(X(t)) : t \in [0,T]\big\}.$$

Zauważmy, że istnienie granicy we wzorze (4.4) jest konsekwencją faktu, że funkcja $T \to \overline{\mu}_T(X)$ jest niemalejąca i ograniczona z góry na $\mathbb{R}_+$. Rzeczywiście, ponieważ zbiór X jest ograniczonym podzbiorem przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$, zatem istnieje stała $c > 0$ taka, że

$$\sup\big\{\|x(t)\|_E : t \in \mathbb{R}_+\big\} \leqslant c$$

dla każdego $x \in X$. Zatem, ustalając dowolnie $t \in \mathbb{R}_+$ wnioskujemy, że

$$\sup\big\{\|x(t)\|_E : x \in X\big\} \leqslant c.$$

To implikuje, że miary niezwartości $\mu(X(t))$ są ograniczone z góry dla $t \in \mathbb{R}_+$.

Następnie dla $T > 0$ połóżmy

$$a_T(X) = \sup_{x\in X}\Big\{\sup\big\{\|x(t)\|_E : t \geqslant T\big\}\Big\}.$$

Funkcja $T \to a_T(X)$ jest nierosnąca i ograniczona na $\mathbb{R}_+$, zatem istnieje skończona granica

$$a_\infty(X) = \lim_{T\to\infty} a_T(X). \tag{4.5}$$

W dalszej części weźmy pod uwagę inne wielkości powiązane z mierzeniem zachowania funkcji ze zbioru X w nieskończoności. Mianowicie, dla $T > 0$ niech:

$$\begin{aligned} b_T(X) &= \sup_{x\in X}\Big\{\sup\big\{\|x(t) - x(s)\|_E : t, s \geqslant T\big\}\Big\}, \\ b_\infty(X) &= \lim_{T\to\infty} b_T(X). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Następnie dla $t \in \mathbb{R}_+$ definiujemy

$$\operatorname{diam} X(t) = \sup\big\{\|x(t) - y(t)\|_E : x, y \in X\big\}$$

oraz

$$c(X) = \limsup_{t\to\infty} \operatorname{diam} X(t). \tag{4.7}$$

Ostatecznie, łącząc (4.3) - (4.7), możemy zdefiniować następujące wielkości:

$$\mu_a(X) = \omega_0^\infty(X) + \overline{\mu}_\infty(X) + a_\infty(X), \tag{4.8}$$

$$\mu_b(X) = \omega_0^\infty(X) + \overline{\mu}_\infty(X) + b_\infty(X), \tag{4.9}$$

$$\mu_c(X) = \omega_0^\infty(X) + \overline{\mu}_\infty(X) + c(X). \tag{4.10}$$

Teraz zostanie sformułowany główny rezultat niniejszego rozdziału.

Twierdzenie 4.1.4. *Niech μ będzie miarą niezwartości w przestrzeni Banacha E. Wtedy funkcje μ_a, μ_b i μ_c zdefiniowane wzorami* (4.8) - (4.10) *odpowiednio, są miarami niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ oraz zachodzą następujące nierówności*

$$\mu_b(X) \leqslant 2\mu_a(X),$$

$$\mu_c(X) \leqslant 2\mu_a(X)$$

dla dowolnego zbioru $X \in \mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$.

Dowód. Najpierw rozważmy rodziny $\ker \mu_a$, $\ker \mu_b$ i $\ker \mu_c$, które są jądrami funkcji μ_a, μ_b oraz μ_c odpowiednio. Zauważmy, że rodzina $\ker \mu_a$ jest niepusta ponieważ zawiera zbiór składający się z funkcji, która jest równa θ na $\mathbb{R}_+$. Ta sama argumentacja pokazuje, że rodzina $\ker \mu_c$ jest niepusta. Podobnie, rodzina $\ker \mu_b$ jest niepusta, ponieważ zawiera zbiory ograniczone składające się z funkcji stałych na przedziale $\mathbb{R}_+$.

Następnie pokażemy, że $\ker \mu_a$, $\ker \mu_b$ oraz $\ker \mu_c$ są podrodzinami rodziny $\mathfrak{N}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$. W tym celu rozważmy rodzinę $\ker \mu_b$. Następnie weźmy zbiór $X \in \ker \mu_b$. To oznacza, że $\mu_b(X) = 0$. Stąd, uwzględniając (4.9) and (4.2) wnioskujemy, że dla dowolnie ustalonego $T > 0$ mamy, że $\omega_0^T(X) = 0$ oraz $\overline{\mu}_T(X) = 0$. To implikuje, że

$$\mu_T(X) = \omega_0^T(X) + \overline{\mu}_T(X) = 0,$$

gdzie μ_T jest miarą niezwartości występującą we wzorze (3.1) i Twierdzeniu 3.1.2, gdy przyjmiemy $I = [0,T]$ oraz μ_T zamiast μ_I. W świetle wspomnianego Twierdzenia 3.1.2 dedukujemy, że zbiór $X|_{[0,T]}$ (obcięcie zbioru X do przedziału $[0,T]$) jest relatywnie zwarty dla dowolnie ustalonego $T > 0$.

Następnie, uwzględniając wzór (4.9) mamy, że $b_\infty(X) = 0$. Stąd na podstawie wzoru (4.6) wyciągamy wniosek, że dla dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ możemy znaleźć takie $T > 0$, że

$$b_T(X) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.11}$$

Dalej, opierając się na fakcie, że zbiór $X|_{[0,T]}$ jest relatywnie zwarty w przestrzeni $C([0,T],E)$, możemy znaleźć skończoną $\frac{\varepsilon}{2}$ - sieć $y_1, y_2, \ldots, y_m$ zbioru $X|_{[0,T]}$ należącą do zbioru $X|_{[0,T]}$ tzn., $y_i \in X|_{[0,T]}$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$ (por. Twierdzenia 3.1.1 oraz 3.1.2).

Następnie dla ustalonego $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ rozważmy przedłużenie $\overline{y}_i$ funkcji y_i zdefiniowane na $\mathbb{R}_+$ w następujący sposób

$$\overline{y}_i(t) = \begin{cases} y_i(t) & \text{dla} \quad t \in [0,T] \\ y_i(T) & \text{dla} \quad t > T. \end{cases}$$

Ustalmy dowolnie funkcję $x \in X$. Następnie uwzględniając powyżej wykazane fakty, dla $t \in [0,T]$ możemy znaleźć $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ takie, że

$$\|x(t) - \overline{y}_i(t)\|_E = \|x(t) - y_i(t)\|_E \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.12}$$

dla $t \in [0,T]$. Natomiast dla $t > T$, biorąc pod uwagę (4.11) oraz (4.12) mamy, że

$$\begin{aligned} \|x(t) - \overline{y}_i(t)\|_E &\leqslant \|x(t) - x(T)\|_E + \|x(T) - \overline{y}_i(t)\|_E \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \|x(T) - \overline{y}_i(T)\|_E \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Zatem funkcje $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_m$ tworzą skończoną ε - sieć zbioru X w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$. Zatem $X \in \mathfrak{N}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$, a to z kolei oznacza, że $\ker \mu_b \subset \mathfrak{N}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$.

Zauważmy teraz, że w świetle nierówności

$$\|x(t) - x(s)\|_E \leqslant \|x(t)\|_E + \|x(s)\|_E$$

mamy, że

$$b_\infty(X) \leqslant 2a_\infty(X),$$

gdzie wielkości a_∞ i b_∞ są zdefiniowane przez (4.5) oraz (4.6) odpowiednio. Zatem, biorąc pod uwagę wzory (4.8) i (4.9) opisujące funkcje μ_a i μ_b wnioskujemy, że spełniona jest pierwsza nierówność twierdzenia:

$$\mu_b(X) \leqslant 2\mu_a(X).$$

Równocześnie z tej nierówności uzyskujemy, że $\ker \mu_a \subset \mathfrak{N}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$.

Analogicznie z nierówności

$$\|x(t) - y(y)\|_E \leqslant \|x(t)\|_E + \|y(t)\|_E,$$

która jest prawdziwa dla wszystkich $x, y \in BC(\mathbb{R}_+, E)$ oraz $t \in \mathbb{R}_+$, otrzymujemy drugą nierówność wskazaną w twierdzeniu. Jednakże, z tej nierówności nie wynika, że $\ker \mu_c \subset \mathfrak{N}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$.

W celu pokazania słuszności tego stwierdzenia ustalmy dowolny zbiór $X \in \ker \mu_c$. Używając argumentacji podobnej jak wyżej wyciągamy wniosek, że dla dowolnego $T > 0$ zbiór $X|_{[0,T]}$ jest relatywnie zwarty w przestrzeni $C([0,T], E)$. Ponadto uwzględniając, że $\mu_c(X) = 0$ wnioskujemy, że $c(X) = 0$, gdzie wielkość $c(X)$ jest zdefiniowana wzorem (4.7).
Stąd wynika, że dla dowolnego ustalonego $\varepsilon > 0$ możemy znalezć $T > 0$ takie, że

$$c(X) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.13}$$

Korzystając z założenia, że zbiór $X|_{[0,T]}$ jest relatywnie zwarty w przestrzeni $C([0,T], E)$, możemy wybrać funkcje $y_1, y_2, \ldots, y_m \in X$ takie, że tworzą one skończoną ε - sieć zbioru X w przestrzeni $C([0,T], E)$. Stąd, dla dowolnego $x \in X$ możemy znaleźć $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ takie, że

$$\|x(t) - y_i(t)\|_E \leqslant \varepsilon$$

dla $t \in [0,T]$. Skoro $x, y_i \in X$, to używając (4.13) wnioskujemy, że

$$\|x(t) - y_i(t)\|_E \leqslant \varepsilon$$

dla każdego $t > T$.
Podsumowując zauważamy, że funkcje $y_1, y_2, \ldots, y_m$ tworzą skończoną ε-sieć zbioru

X w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$. Stąd otrzymujemy, że $X \in \mathfrak{N}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$, co pokazuje żądane zawieranie $\ker \mu_c \subset \mathfrak{N}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$.

Zauważmy, że stwierdzenie, że funkcje μ_a, μ_b oraz μ_c spełniają warunek (ii) Definicji 2.2.1 jest spełnione wprost z definicji tych funkcji.

Teraz udowodnimy, że funkcje μ_a, μ_b oraz μ_c spełniają warunek (iii) Definicji 2.2.1. W tym celu ustalmy zbiór $X \in \mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$ i oznaczmy $\mu_a(X) = r$, gdzie $r = r_1 + r_2 + r_3$ oraz $\omega_0^\infty(X) = r_1$, $\overline{\mu}_\infty(X) = r_2$, $a_\infty(X) = r_3$. Następnie rozważmy domknięcie $\overline{X}$ zbioru X. Oczywiście $\mu_a(X) \leqslant \mu_a(\overline{X})$, $\mu_b(X) \leqslant \mu_b(\overline{X})$ oraz $\mu_c(X) \leqslant \mu_c(\overline{X})$. Aby udowodnić nierówności przeciwne ustalmy $x \in \overline{X}$. W szczególności oznacza to, że istnieje ciąg $(x_n) \subset X$ taki, że $x_n \to x$ dla $n \to \infty$. Stąd, biorąc dowolne $\varepsilon > 0$ znajdujemy liczbę naturalną n_0 taką, że

$$\|x_n(t) - x(t)\|_E \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \tag{4.14}$$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}_+$ oraz dla $n \geqslant n_0$.
Dalej zauważmy, że z równości $\omega_0^\infty(X) = r_1$ wnioskujemy, że istnieje $\delta > 0$ taka, że $\omega^\infty(x_n, \delta) \leqslant r_1 + \dfrac{\varepsilon}{3}$ dla $n = 1, 2, \ldots$. To implikuje, że

$$\|x_n(t) - x_n(s)\|_E \leqslant r_1 + \frac{\varepsilon}{3}$$

dla wszystkich $t, s \in \mathbb{R}_+$ takich, że $|t - s| \leqslant \delta$ oraz dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.
Stąd, ustalając $t, s \in \mathbb{R}_+$ takie, że $|t - s| \leqslant \delta$ i opierając się na (4.14), dla $n \geqslant n_0$ otrzymamy

$$\begin{aligned} \|x(t) - x(s)\|_E &\leqslant \|x(t) - x_n(t)\|_E + \|x_n(t) - x_n(s)\|_E \\ &+\|x_n(s) - x(s)\|_E \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + r_1 + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = r_1 + \varepsilon. \end{aligned}$$

To implikuje, że

$$\omega^\infty(x, \delta) \leqslant r_1 + \varepsilon.$$

W rezultacie mamy, że

$$\omega^\infty(\overline{X}, \delta) \leqslant r_1 + \varepsilon.$$

Zatem, otrzymujemy następujące oszacowanie

$$\omega_0^\infty(\overline{X}) \leqslant r_1$$

co pokazuje, że $\omega_0^\infty(\overline{X}) \leqslant \omega_0^\infty(X)$. To implikuje z kolei równość $\omega_0^\infty(X) = \omega_0^\infty(\overline{X})$.

Zauważmy dalej, że równość $\overline{\mu}_\infty(\overline{X}) = \overline{\mu}_\infty(X)$ jest konsekwencją wzoru (4.4) i faktu, że μ jest miarą niezwartości w przestrzeni E.

Wykorzystując równość $a_\infty(X) = r_3$ oraz wzór (4.5), dla dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ możemy znaleźć $T > 0$ takie, że

$$a_T(X) \leqslant r_3 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

To implikuje z kolei, że

$$\|y(t)\|_E \leqslant r_3 + \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.15}$$

dla wszystkich $y \in X$ oraz dla $t \geqslant T$.

Dalej ustalmy $x \in \overline{X}$. Jak już zostało powiedziane wcześniej możemy znaleźć ciąg $(x_n) \subset X$ taki, że

$$\|x_n(t) - x(t)\|_E \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$ i dla $n \geqslant n_0$. Łącząc powyższe stwierdzenia z nierównością (4.15), dla dowolnego $t \in \mathbb{R}_+$ i dla $n \geqslant n_0$ mamy, że

$$\|x(t)\|_E \leqslant \|x(t) - x_n(t)\|_E + \|x_n(t)\|_E \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + r_3 + \frac{\varepsilon}{2} = r_3 + \varepsilon.$$

To implikuje, że

$$a_T(\overline{X}) \leqslant r_3 + \varepsilon.$$

Stąd dla $T \to \infty$ otrzymujemy

$$a_\infty(\overline{X}) \leqslant r_3 + \varepsilon$$

co dowodzi nierówności $a_\infty(\overline{X}) \leqslant a_\infty(X)$. Oczywiście to implikuje równość $a_\infty(X) = a_\infty(\overline{X})$.

Równość $b_\infty(\overline{X}) = b_\infty(X)$ możemy pokazać w podobny sposób.

Pokażemy teraz, że prawdziwa jest równość $c(\overline{X}) = c(X)$. W tym celu oznaczmy $r_4 = c(X)$. Uwzględniając wzór (4.7) wnioskujemy stąd, że dla dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ możemy znaleźć $T > 0$ takie, że

$$\operatorname{diam} X(t) \leqslant r_4 + \frac{\varepsilon}{3} \tag{4.16}$$

dla $t \geqslant T$.

Następnie, ustalmy dowolnie elementy $x, y \in \overline{X}$. Wybierzmy ciągi $(x_n), (y_n) \subset X$ w ten sposób, że istnieje liczba naturalna n_0 taka, że

$$\|x_n(t) - x(t)\|_E \leqslant \frac{\varepsilon}{3}, \quad \|y_n(t) - y(t)\|_E \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \tag{4.17}$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$ oraz dla $n \geqslant n_0$. W świetle oszacowania (4.16) wnioskujemy, że

$$\|x_n(t) - y_n(t)\|_E \leqslant r_4 + \frac{\varepsilon}{3} \tag{4.18}$$

dla $n \in \mathbb{N}$ oraz dla $t \geqslant T$.

Teraz łącząc (4.17) oraz (4.18), dla $n \geqslant n_0$ i dla $t \geqslant T$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\|x(t) - y(t)\|_E &\leqslant \|x(t) - x_n(t)\|_E + \|x_n(t) - y_n(t)\|_E + \|y_n(t) - y(t)\|_E \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + r_4 + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = r_4 + \varepsilon.\end{aligned}$$

Oczywiście to implikuje, że $\operatorname{diam} \overline{X}(t) \leqslant r_4 + \varepsilon$ dla $t \geqslant T$. Stąd mamy żądaną równość $c(\overline{X}) = c(X)$.

Wykażemy teraz, że spełniony jest warunek (iv) Definicji 2.2.1.

Zauważmy najpierw, że z faktu, że μ jest miarą niezwartości w przestrzeni E wynika, równość

$$\overline{\mu}_\infty(\operatorname{Conv} X) = \overline{\mu}_\infty(X)$$

dla dowolnie ustalonego zbioru $X \in \mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$.

Z drugiej strony pamiętając, że wielkości ω^∞, a_T, b_T oraz c są subliniowe w stosunku do operacji algebraicznych w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ wyciągamy wniosek, że

$$\begin{aligned}\omega^\infty(\operatorname{conv} X, \varepsilon) &= \omega^\infty(X, \varepsilon), \\ a_T(\operatorname{conv} X) &= a_T(X), \\ b_T(\operatorname{conv} X) &= b_T(X), \\ c(\operatorname{conv} X) &= c(X)\end{aligned}$$

dla dowolnych $\varepsilon > 0$ i $T > 0$. To pozwala nam wywnioskować, że $\omega_0^\infty(\operatorname{conv} X) = \omega_0^\infty(X)$, $a_\infty(\operatorname{conv} X) = a_\infty(X)$, oraz $b_\infty(\operatorname{conv} X) = b_\infty(X)$. Stąd, w świetle warunku (iii) Definicji 2.2.1 wnioskujemy, że funkcje μ_a, μ_b oraz μ_c są niezmiennicze względem domknięcia wypukłego. Zatem te funkcje spełniają warunek (iv) Definicji 2.2.1.

Analogicznie możemy pokazać, że funkcje μ_a, μ_b i μ_c spełniają warunek (v).

Pozostało wykazać, że funkcje μ_a, μ_b oraz μ_c spełniają warunek (vi) Definicji 2.2.1.

W tym celu ustalmy ciąg zbiorów domkniętych (X_n) z rodziny $\mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$ takich, że $X_{n+1} \subset X_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz $\lim_{n\to\infty} \mu_a(X_n) = 0$. Z równości (4.8) otrzymujemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \omega_0^\infty(X_n) = 0, \tag{4.19}$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\mu}_\infty(X_n) = 0, \tag{4.20}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_\infty(X_n) = 0. \tag{4.21}$$

Dalej, korzystając z (4.3) wnioskujemy, że dla dowolnego $h > 0$ spełniona jest następująca nierówność

$$\omega^\infty(X_{n+1}, h) \leqslant \omega^\infty(X_n, h)$$

dla $n = 1, 2, \ldots$.

Załóżmy dalej, że (t_i) jest ciągiem nieujemnych liczb rzeczywistych, gęstym w przedziale $\mathbb{R}_+$. Następnie rozważmy ciąg funkcji $x_n = x_n(t)$ dla $t \in \mathbb{R}_+$ takich, że $x_n \in X_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Używając metody przekątniowej bez straty ogólności możemy założyć, że ciąg (x_n) jest punktowo zbieżny na zbiorze punktów ciągu (t_i). Wreszcie, definiujemy funkcję x_∞ na zbiorze punktów ciągu (t_i) następująco

$$x_\infty(t_i) = \lim_{n\to\infty} x_n(t_i)$$

dla każdego $i = 1, 2, \ldots$. Pokażemy, że funkcja x_∞ jest jednostajnie ciągła na zbiorze punktów ciągu (t_i).

W tym celu zauważmy, że dla dowolnie ustalonych indeksów i, j oraz dla dowolnej liczby naturalnej n mamy

$$\begin{aligned}
&\|x_\infty(t_i) - x_\infty(t_j)\|_E \\
&\leqslant \|x_\infty(t_i) - x_n(t_i)\|_E + \|x_n(t_i) - x_n(t_j)\|_E + \|x_n(t_j) - x_\infty(t_j)\|_E \\
&\leqslant \|x_\infty(t_i) - x_n(t_i)\|_E + \omega^\infty(X_n, |t_i - t_j|) + \|x_n(t_j) - x_\infty(t_j)\|_E.
\end{aligned}$$

Stąd dla $n \to \infty$ otrzymujemy, że

$$\|x_\infty(t_i) - x_\infty(t_j)\|_E \leqslant \lim_{n\to\infty} \omega^\infty(X_n, |t_i - t_j|). \tag{4.22}$$

Z powyższego oszacowania oraz (4.19) wynika, że funkcja x_∞ jest jednostajnie ciągła w punktach ciągu (t_i).

Teraz, stosując Twierdzenie 1.5 wnioskujemy, że funkcja x_∞ może być rozszerzona w jedyny sposób do funkcji jednostajnie ciągłej na $\mathbb{R}_+$. To rozszerzenie również będziemy oznaczać przez x_∞. Z nierówności (4.22) mamy, że

$$\|x_\infty(t) - x_\infty(s)\|_E \leqslant \lim_{n\to\infty} \omega^\infty(X_n, |t - s|) \tag{4.23}$$

dla dowolnego $t, s \in \mathbb{R}_+$.

Pokażemy teraz, że funkcja x_∞ jest granicą jednostajną ciągu funkcji (x_n). W tym celu ustalmy dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$. Uwzględniając równość (4.19) możemy znaleźć liczbę naturalną n_0 taką, że

$$\omega_0^\infty(X_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

dla $n \geqslant n_0$. Stąd, na podstawie (4.3), istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że

$$\omega^\infty(X_n, h) \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$$

dla każdego h takiego, że $0 < h \leqslant \delta$ oraz dla $n \geqslant n_0$.
W konsekwencji otrzymujemy nierówność

$$\lim_{n\to\infty} \omega^\infty(X_n, h) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.24}$$

dla h takich, że $0 < h \leqslant \delta$.

Następnie wybierzmy t_j w ten sposób, że $|t - t_j| < h$. Wtedy mamy

$$\begin{aligned}\|x_\infty(t) - x_n(t)\|_E &\leqslant \|x_\infty(t) - x_\infty(t_j)\|_E \\ &\quad + \|x_\infty(t_j) - x_n(t_j)\|_E + \|x_n(t_j) - x_n(t)\|_E.\end{aligned}$$

Stąd w świetle nierówności (4.23) oraz (4.24) otrzymujemy

$$\begin{aligned}&\|x_\infty(t) - x_n(t)\|_E \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} \omega^\infty(X_n, h) + \|x_\infty(t_j) - x_n(t_j)\|_E + \omega^\infty(X_n, h) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \|x_\infty(t_j) - x_n(t_j)\|_E + \omega^\infty(X_n, h).\end{aligned}$$

Z powyższego oszacowania wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n(t) - x_\infty(t)\|_E \leqslant \varepsilon$$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}_+$. Stąd dostajemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_\infty\|_{BC(\mathbb{R}_+,E)} = 0. \tag{4.25}$$

Powyższa równość oznacza, że funkcja x_∞ jest jednostajną granicą ciągu funkcji (x_n) na przedziale $\mathbb{R}_+$. W szczególności z (4.25) wnioskujemy, że x_∞ jest punktem domknięcia wszystkich zbiorów X_n $(n = 1, 2, \dots)$. Stąd otrzymujemy wniosek, że $x_\infty \in X_n$ dla $n = 1, 2, \dots$. Zatem przecięcie $X_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ jest niepuste.

Ostatecznie, łącząc uzyskany wniosek z równościami (4.20) oraz (4.21) wnioskujemy, że funkcja μ_a spełnia warunek (vi) Definicji 2.2.1.

W analogiczny sposób dowodzimy, że funkcje μ_b oraz μ_c spełniają warunek (vi) Definicji 2.2.1.

Zatem funkcje μ_a, μ_b oraz μ_c są miarami niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$.

Koniec dowodu. $\square$

Następnie opiszemy jądra miar niezwartości μ_a, μ_b oraz μ_c zdefiniowanych wzorami (4.8), (4.9) oraz (4.10), odpowiednio.

Po pierwsze zauważmy, że jądro $\ker \mu_a$ miary μ_a składa się ze wszystkich ograniczonych podzbiorów X przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ takich, że funkcje z X są jednostajnie ciągłe i jednakowo ciągłe na $\mathbb{R}_+$ (innymi słowami można powiedzieć, że te funkcje są jednakowo jednostajnie ciągłe na $\mathbb{R}_+$). To ostatnie stwierdzenie jest równoważne temu, że funkcje ze zbioru X są jednakowo ciągłe na półosi $\mathbb{R}_+$. Ponadto, funkcje ze zbioru X zmierzają do zera z tą samą prędkością, tzn. jednostajnie ze względu na zbiór:

$$\forall_{\varepsilon>0} \; \exists_{T>0} \; \forall_{t\geqslant T} \; \forall_{x\in X} \; \|x(t)\|_E \leqslant \varepsilon.$$

Oprócz tego wszystkie przekroje $X(t)$ zbioru X należą do jądra miary niezwartości μ w przestrzeni Banacha E. W szczególności, wspomniane przekroje $X(t)$ są relatywnie zwarte w E.

Podobnie, jądro $\ker \mu_b$ miary μ_b składa się ze wszystkich ograniczonych podzbiorów X przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ takich, że funkcje z X są jednakowo ciągłe na półosi $\mathbb{R}_+$ oraz wszystkie przekroje $X(t)$ zbioru X są zawarte w jądrze miary niezwartości μ w przestrzeni E. Ponadto wszystkie funkcje z X zmierzają do granic w nieskończoności jednostajnie ze względu na zbiór X.
Wreszcie jądro $\ker \mu_c$ miary μ_c zawiera wszystkie ograniczone podzbiory X przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ które są jednakowo ciągłe na $\mathbb{R}_+$ oraz wszystkie przekroje $X(t)$ zbioru X są elementami jądra $\ker \mu$ w przestrzeni Banacha E. Dodatkowo grubość wiązki utworzonej przez wykresy funkcji z X zmierza do zera w nieskończoności.

Zauważmy dalej, że miary niezwartości μ_a, μ_b oraz μ_c zdefiniowane wzorami (4.8) - (4.10) nie są pełne. To oznacza, że jądra $\ker \mu_a$, $\ker \mu_b$ oraz $\ker \mu_c$ są podrodzinami właściwymi rodziny $\mathfrak{N}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$.
Chcąc to pokazać rozważmy ustalony niezerowy wektor $x_0 \in E$. W przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ rozważmy funkcje $x = x(t)$, $y = y(t)$ zdefiniowane następująco:

$$x(t) = x_0 \sin t, \quad y(t) = x_o \cos t$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$. Niech zbiór $X = \{x, y\}$. Oczywiście zbiór X jest zwartym podzbiorem przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$, ponieważ jest skończony. Ponadto łatwo wykazać, że $\omega_0^\infty(X) = 0$ oraz $\overline{\mu}_\infty(X) = 0$, gdzie wielkości ω_0^∞ i $\overline{\mu}_\infty$ są zdefiniowane przez (4.3) oraz (4.4) odpowiednio.
Z drugiej strony biorąc pod uwagę wielkości a_∞, b_∞ oraz c opisane odpowiednio wzorami (4.5), (4.6) oraz (4.7) widzimy, że

$$a_\infty(X) = \|x_0\|_E, \quad b_\infty(X) = 2\|x_0\|_E, \quad c(X) = \sqrt{2}\|x_0\|_E.$$

Zatem, korzystając ze wzorów (4.8) - (4.10) otrzymujemy

$$\mu_a(X) = \|x_0\|_E, \quad \mu_b(X) = 2\|x_0\|_E, \quad \mu_c(X) = \sqrt{2}\|x_0\|_E.$$

Zatem zbiór X nie należy do żadnej z rodzin $\ker \mu_a$, $\ker \mu_b$ oraz $\ker \mu_c$.

W dalszej części warto wspomnieć, że miary niezwartości μ_a i μ_b zdefiniowane wzorami (4.8) oraz (4.9) mają własność maksimum podczas gdy miara μ_c nie ma tej własności. Ponadto jeśli założymy, że miara μ w przestrzeni Banacha E jest subliniowa, to wtedy wszystkie miary μ_a, μ_b oraz μ_c są subliniowe w przestrzeni Banacha $BC(\mathbb{R}_+, E)$.

Uwaga 4.1.5. Przypomnijmy, że w przypadku gdy miara niezwartości μ w przestrzeni Banacha E jest miarą Hausdorffa χ (lub Kuratowskiego, lub dowolną regularną miarą równoważną mierze Hausdorffa), to możemy określić miarę niezwartości w przestrzeni Banacha $BC(\mathbb{R}_+, E)$, wzorami (3.19)-(3.21). Dokonuje się tego przez zastąpienie pierwszego składnika ω_0^∞ bardziej ogólnym ω_0. W podrozdziale 3.3 znajduje się wyprowadzenie równości, które tu przypomnimy. Mianowicie dla $X \in \mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$ oraz dla $\varepsilon > 0$, $x \in X$, $T > 0$ mamy poniższe równości:

$$\begin{aligned}
\omega^T(x,\varepsilon) &= \sup\left\{\|x(t)-x(s)\|_E : t,s \in [0,T], |t-s| \leqslant \varepsilon\right\},\\
\omega^T(X,\varepsilon) &= \sup\left\{\omega^T(x,\varepsilon) : x \in X\right\},\\
\omega_0^T(X) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \omega^T(X,\varepsilon),\\
\omega_0(X) &= \lim_{T\to\infty} \omega_0^T(X).
\end{aligned}$$

Oczywiście, z nierówności (4.2) wnioskujemy, że

$$\omega_0(X) \leqslant \omega_0^\infty(X).$$

Ponadto, $\omega_0(X) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje należące do X są lokalnie jednakowo ciągłe na przedziale $\mathbb{R}_+$.
Zatem miary niezwartości μ_a, μ_b, oraz μ_c określone na przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ wzorami (3.19)-(3.21) są różne i bardziej ogólne od miar (4.8)-(4.10).

Należy pamiętać jednak, że w przypadku, gdy nie znamy wzorów wyrażających miarę niezwartości Hausdorffa w przestrzeni Banacha E (lub regularną miarę równoważną mierze Hausdorffa), wtedy konstrukcja miary w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ na podstawie wzorów (3.19)-(3.21) jest niemożliwa. Ponadto miary niezwartości, które zostały zaprezentowane w tym rozdziale, wyrażone wzorami (4.8) - (4.10), okazują się być bardziej wygodne z praktycznego punktu widzenia (por. następny rozdział).

4.2 Formuły dla miar niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$

Biorąc pod uwagę dalsze zastosowanie miar niezwartości μ_a, μ_b oraz μ_c w teorii nieskończonych układów równań całkowych, rozważymy jako przestrzeń Banacha E przestrzeń ciągową l_∞ składającą się ze wszystkich ciągów ograniczonych (x_n). Nasze rozważania będą dotyczyły ciągów rzeczywistych. Oczywiście przestrzeń l_∞ będzie wyposażona w klasyczną normę supremum

$$\|x\| = \|(x_n)\| = \sup\big\{|x_n| : n = 1, 2, \dots\big\},$$

gdzie $x = (x_n) \in l_\infty$.

Warto przypomnieć [7, 11], że nie jest znany wzór wyrażający miarę niezwartości Hausdorffa (lub Kuratowskiego) w przestrzeni l_∞. W związku z tym nie można zastosować w tym wypadku teorii rozwiniętej w pracy [5].

Rozważmy zatem przestrzeń $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$ którą będziemy oznaczać symbolem BC_∞, składającą się z funkcji $x : \mathbb{R}_+ \to l_\infty$ ciągłych i ograniczonych na $\mathbb{R}_+$. Takie funkcje można zapisać w formie

$$x(t) = (x_n(t)) = (x_1(t), x_2(t), \dots)$$

dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$, gdzie ciąg $(x_n(t))$ jest elementem przestrzeni l_∞ dla każdego ustalonego t. Norma funkcji $x = x(t) = (x_n(t))$ jest zdefiniowana równością

$$\|x\| = \sup\big\{\|x(t)\|_{l_\infty} : t \in \mathbb{R}_+\big\} = \sup_{t\in\mathbb{R}_+}\Big\{\sup\big\{|x_n(t)| : n = 1, 2, \dots\big\}\Big\}.$$

Dalej zaprezentowane będą wzory wyrażające miary niezwartości μ_a, μ_b oraz μ_c w powiązaniu z miarami niezwartości w przestrzeni l_∞.

Na początku ustalmy zbiór $X \in \mathfrak{M}_{BC_\infty}$. Dla $\varepsilon > 0$ oraz dla dowolnej funkcji $x(t) = (x_n(t))$ należącej do zbioru X rozważmy moduł ciągłości $\omega^\infty(x, \varepsilon)$ zdefiniowany wcześniej wzorem (4.1), który teraz prezentujemy w następującej postaci

$$\begin{aligned}\omega^\infty(x, \varepsilon) &= \sup\big\{\|x(t) - x(s)\|_{l_\infty} : t, s \in \mathbb{R}_+, |t-s| \leqslant \varepsilon\big\}\\ &= \sup\Big\{\sup\big\{|x_n(t) - x_n(s)| : n = 1, 2, \dots\big\} : t, s \in \mathbb{R}_+, |t-s| \leqslant \varepsilon\Big\}.\end{aligned}$$

Następnie na podstawie powyższego wzoru oraz (4.3), otrzymujemy

$$\omega^\infty(X, \varepsilon) = \sup_{x\in X}\left\{\sup\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n(t) - x_n(s)| : t, s \in \mathbb{R}_+, |t-s| \leqslant \varepsilon\right\}\right\}.$$

Ostatecznie mamy

$$\begin{aligned}\omega_0^{\infty}(X) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\omega^{\infty}(X,\varepsilon)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\sup_{x\in X}\left\{\sup\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n(t)-x_n(s)| : t,s\in\mathbb{R}_+, |t-s|\leqslant\varepsilon\right\}\right\}\right\}. \qquad (4.26)\end{aligned}$$

Następnie aby zdefiniować drugi składnik $\overline{\mu}_{\infty}$ miar μ_a, μ_b oraz μ_c danych wzorami (4.8) - (4.10) załóżmy, że w przestrzeni l_{∞} weźmiemy pod uwagę miary niezwartości μ^1, μ^2, μ^3 określone na rodzinie $\mathfrak{M}_{l_{\infty}}$ w następujący sposób [7, 11]:

$$\begin{aligned}\mu^1(X) &= \lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{x=(x_i)\in X}\left\{\sup\left\{|x_k| : k\geqslant n\right\}\right\}\right\},\\ \mu^2(X) &= \lim_{p\to\infty}\left\{\sup_{x=(x_i)\in X}\left\{\sup\left\{|x_n-x_m| : n,m\geqslant p\right\}\right\}\right\},\\ \mu^3(X) &= \limsup_{n\to\infty}\operatorname{diam} X_n,\end{aligned}$$

gdzie

$$X_n = \{x_n : x=(x_i)\in X\}$$

oraz

$$\operatorname{diam} X_n = \sup\left\{|x_n-y_n| : x=(x_i), y=(y_i)\in X\right\}.$$

Teraz w oparciu o wyżej podane wzory, możemy zdefiniować wielkości $\overline{\mu}_{\infty}^i$ $(i = 1,2,3)$ związane z tymi wzorami. Mianowicie dla $X\in\mathfrak{M}_{BC_{\infty}}$ oraz dla ustalonego $T>0$ mamy:

$$\begin{aligned}\overline{\mu}_T^1(X) &= \sup\left\{\mu^1(X(t)) : t\in[0,T]\right\}\\ &= \sup_{t\in[0,T]}\left\{\lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{x=x(t)\in X}\left\{\sup\left\{|x_k(t)| : k\geqslant n\right\}\right\}\right\}\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mu}_T^2(X) &= \sup\left\{\mu^2(X(t)) : t\in[0,T]\right\}\\ &= \sup_{t\in[0,T]}\left\{\lim_{p\to\infty}\left\{\sup_{x=x(t)\in X}\left\{\sup\left\{|x_n(t)-x_m(t)| : n,m\geqslant p\right\}\right\}\right\}\right\},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\mu}_T^3(X) &= \sup\left\{\mu^3(X(t)) : t \in [0,T]\right\} \\
&= \sup_{t\in[0,T]}\left\{\limsup_{n\to\infty}\left\{\sup\left\{|x_n(t)-y_n(t)| : x = x(t), y = y(t) \in X\right\}\right\}\right\}.
\end{aligned}
$$

Stąd wyprowadzamy następujące wzory:

$$
\begin{aligned}
\overline{\mu}_\infty^1(X) &= \lim_{T\to\infty} \overline{\mu}_T^1(X) \\
&= \lim_{T\to\infty}\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left\{\lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{x=x(t)\in X}\left\{\sup\left\{|x_k(t)| : k \geqslant n\right\}\right\}\right\}\right\}\right\}, \qquad (4.27)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\mu}_\infty^2(X) &= \lim_{T\to\infty} \overline{\mu}_T^2(X) \\
&= \lim_{T\to\infty}\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left\{\lim_{p\to\infty}\left\{\sup_{x=x(t)\in X}\left\{\sup\left\{|x_n(t)-x_m(t)| : n,m \geqslant p\right\}\right\}\right\}\right\}\right\}, \qquad (4.28)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\mu}_\infty^3(X) &= \lim_{T\to\infty} \overline{\mu}_T^3(X) \\
&= \lim_{T\to\infty}\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left\{\limsup_{n\to\infty}\left\{\sup\left\{|x_n(t)-y_n(t)| : x = x(t), y = y(t) \in X\right\}\right\}\right\}\right\}. \qquad (4.29)
\end{aligned}
$$

Teraz określmy trzeci składnik skonstruowanych miar niezwartości w przestrzeni Banacha BC_∞. W tym celu zauważmy, że w oparciu o wzory (4.5), (4.6) oraz (4.7), mamy:

$$
\begin{aligned}
a_\infty(X) &= \lim_{T\to\infty} a_T(X) \\
&= \lim_{T\to\infty}\left\{\sup_{x=x(t)\in X}\left\{\sup\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n(t)| : t \geqslant T\right\}\right\}\right\}, \qquad (4.30)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_\infty(X) &= \lim_{T\to\infty} b_T(X) \\
&= \lim_{T\to\infty}\left\{\sup_{x=x(t)\in X}\left\{\sup\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n(t)-x_n(s)| : t,s \geqslant T\right\}\right\}\right\}, \qquad (4.31)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c(X) &= \limsup_{t\to\infty} \operatorname{diam} X(t) \\
&= \limsup_{t\to\infty}\left\{\sup\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n(t)-y_n(t)| : x = x(t), y = y(t) \in X\right\}\right\}. \qquad (4.32)
\end{aligned}
$$

Ostatecznie, mając na uwadze wzory (4.8) - (4.10) opisujące miary niezwartości w przestrzeni Banacha $BC(\mathbb{R}_+, E)$ oraz biorąc pod uwagę powyżej otrzymane wzory (4.26) - (4.32) możemy przedstawić dziewięć wzorów opisujących odpowiednie miary niezwartości w przestrzeni Banacha BC_∞. Zatem mamy:

$$\mu_a^i(X) = \omega_0^\infty(X) + \overline{\mu}_\infty^i(X) + a_\infty(X) \tag{4.33}$$

dla $i = 1, 2, 3$. Podobnie otrzymujemy

$$\mu_b^i(X) = \omega_0^\infty(X) + \overline{\mu}_\infty^i(X) + b_\infty(X) \tag{4.34}$$

dla $i = 1, 2, 3$. Ostatecznie możemy określić miarę niezwartości powiązaną z czynnikiem $c = c(X)$ następująco

$$\mu_c^i(X) = \omega_0^\infty(X) + \overline{\mu}_\infty^i(X) + c(X) \tag{4.35}$$

dla $i = 1, 2, 3$.
Nie będziemy charakteryzować jąder powyżej zdefiniowanych miar niezwartości ponieważ odpowiednia charakteryzacja była opisana wcześniej.

W dalszej części podamy inny wzór wyrażający wartość $\overline{\mu}_\infty$ określoną wzorem (4.4):

$$\overline{\mu}_\infty(X) = \lim_{T\to\infty} \overline{\mu}_T(X) = \lim_{T\to\infty} \Big\{ \sup \big\{ \mu(X(t)) : t \in [0, T] \big\} \Big\}.$$

W tym celu wykażemy następujący lemat.

Lemat 4.2.1. *Spełniona jest następująca równość*

$$\overline{\mu}_\infty(X) = \sup \big\{ \mu(X(t)) : t \in \mathbb{R}_+ \big\},$$

gdzie wielkość $\overline{\mu}_\infty$ *jest wyrażona wzorem* (4.4).

Dowód. Oczywiście dla ustalonego $T > 0$ mamy

$$\sup \big\{ \mu(X(t)) : t \in [0, T] \big\} \leqslant \sup \big\{ \mu(X(t)) : t \in \mathbb{R}_+ \big\}.$$

Zatem mamy

$$\overline{\mu}_\infty(X) = \lim_{T\to\infty} \Big\{ \sup \big\{ \mu(X(t)) : t \in [0, T] \big\} \Big\} \leqslant \sup \big\{ \mu(X(t)) : t \in \mathbb{R}_+ \big\}. \tag{4.36}$$

W celu udowodnienia przeciwnej nierówności oznaczmy

$$\delta = \sup \big\{ \mu(X(t)) : t \in \mathbb{R}_+ \big\}.$$

Ustalmy dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$. Wtedy możemy znaleźć liczbę $t_0 \in \mathbb{R}_+$ taką, że

$$\delta - \varepsilon \leqslant \mu(X(t_0)).$$

Zatem dla $T \geqslant t_0$ otrzymujemy

$$\delta - \varepsilon \leqslant \sup \big\{ \mu(X(t)) : t \in [0,T] \big\}. \tag{4.37}$$

Ponieważ funkcja $T \to \sup \big\{ \mu(X(t)) : t \in [0,T] \big\}$ jest niemalejąca to otrzymujemy, że

$$\sup \big\{ \mu(X(t)) : t \in [0,T] \big\} \leqslant \lim_{T\to\infty} \Big\{ \sup \big\{ \mu(X(t)) : t \in [0,T] \big\} \Big\}. \tag{4.38}$$

Łącząc (4.37) oraz (4.38), uzyskujemy

$$\delta - \varepsilon \leqslant \lim_{T\to\infty} \Big\{ \sup \big\{ \mu(X(t)) : t \in [0,T] \big\} \Big\}.$$

W konsekwencji, uwzględniając dowolność wartości ε, otrzymujemy następującą nierówność

$$\delta \leqslant \lim_{T\to\infty} \Big\{ \sup \big\{ \mu(X(t)) : t \in [0,T] \big\} \Big\} = \overline{\mu}_\infty(X). \tag{4.39}$$

Ostatecznie łącząc (4.36) oraz (4.39) uzyskujemy żądaną równość. □

Zauważmy, że biorąc pod uwagę Lemat 4.2.1 oraz wzory (4.27)-(4.29) opisujące wartość $\overline{\mu}^i_\infty$ dla $i = 1, 2, 3$, w przestrzeni BC_∞, uzyskujemy następujący wniosek.

Wniosek 4.2.2. *Wartości* (4.27)-(4.29) *mogą być wyrażone następującymi wzorami odpowiednio*

$$\overline{\mu}^1_\infty(X) = \sup_{t\geqslant 0} \left\{ \lim_{n\to\infty} \left\{ \sup_{x\in X} \Big\{ \sup \big\{ |x_k(t)| : k \geqslant n \big\} \Big\} \right\} \right\},$$

$$\overline{\mu}^2_\infty(X) = \sup_{t\geqslant 0} \left\{ \lim_{p\to\infty} \left\{ \sup_{x=x(t)\in X} \Big\{ \sup \big\{ |x_n(t) - x_m(t)| : n,m \geqslant p \big\} \Big\} \right\} \right\},$$

$$\overline{\mu}^3_\infty(X) = \sup_{t\geqslant 0} \left\{ \limsup_{n\to\infty} \Big\{ \sup \big\{ |x_n(t) - y_n(t)| : x = x(t), y = y(t) \in X \big\} \Big\} \right\}.$$

5 Twierdzenia egzystencjalne dla nieskończonych układów równań całkowych na półosi rzeczywistej

Ten rozdział przedstawia kluczowe wyniki pracy. Mianowicie przedstawione są tutaj twierdzenia o istnieniu rozwiązań dla nieskończonych układów równań całkowych na półosi rzeczywistej. Rezultaty te oparte są na wykorzystaniu narzędzia jakim są skonstruowane w poprzednim rozdziale miary niezwartości.

5.1 Rozwiązalność nieskończonych układów równań całkowych w klasie ciągów funkcyjnych na $\mathbb{R}_+$ asymptotycznie stabilnych

W tej części pracy zostanie pokazane zastosowanie miar niezwartości skonstruowanych w poprzedniej sekcji w przestrzeni Banacha $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$.
Mianowicie, rozważmy nieskończony układ nieliniowych kwadratowych równań całkowych typu Volterry-Hammersteina postaci

$$x_n(t) = a_n(t) + f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots) \int_0^t k_n(t,s) g_n(s, x_1(s), x_2(s), \dots)\, ds \tag{5.1}$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$ oraz dla $n = 1, 2, \dots$.
Jak już zostało wcześniej wspomniane, nasze rozważania będą dotyczyć przestrzeni Banacha $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$ opisanej wcześniej. Będziemy używać miary niezwartości $\mu_c^3(X)$ zdefiniowanej wzorem (4.35) (dla $i = 3$). Dokładniej mówiąc ta miara jest zdefiniowana następująco

$$\mu_c^3(X) = \omega_0^\infty(X) + \overline{\mu}_\infty^3(X) + c(X),$$

gdzie składniki ω_0^∞, $\overline{\mu}_\infty^3$ oraz c są opisane odpowiednio wzorami (4.26), (4.29) oraz (4.32), które tu przypomnimy:

$$\omega_0^\infty(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \sup_{x \in X} \left\{ \sup \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n(t) - x_n(s)| : t, s \in \mathbb{R}_+, |t-s| \leqslant \varepsilon \right\} \right\} \right\},$$

$$\overline{\mu}^3_\infty(X) = \lim_{T\to\infty}\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left\{\limsup_{n\to\infty}\Big\{\sup\big\{|x_n(t)-y_n(t)| : x=x(t), y=y(t)\in X\big\}\Big\}\right\}\right\},$$

$$c(X) = \limsup_{t\to\infty}\left\{\sup\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n(t)-y_n(t)| : x=x(t), y=y(t)\in X\right\}\right\}.$$

Uwaga 5.1.1. Bardzo istotna jest obserwacja, że do jądra miary μ^3_c, której będziemy używać, należą takie zbiory X z przestrzeni $BC_\infty = BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$, że elementy tych zbiorów są ciągami funkcyjnymi określonymi na $\mathbb{R}_+$ i m.in. takimi, że są to ciągi w pewnym sensie asymptotycznie stabilne. Dokładniej, jądro $\ker\mu^3_c$ zawiera wszystkie ograniczone podzbiory X przestrzeni BC_∞ które są jednakowo ciągłe na $\mathbb{R}_+$, oraz wszystkie przekroje $X(t)$ zbioru X są relatywnie zwarte w przestrzeni Banacha l_∞. Ponadto grubość wiązki utworzonej przez wykresy funkcji z X zmierza do zera w nieskończoności.

Sformułujemy teraz założenia, pod jakimi będziemy rozważać nieskończony układ równań całkowych (5.1).

(*i*) Ciąg $(a_n(t))$ jest elementem przestrzeni BC_∞. Ponadto funkcje $a_n = a_n(t)$ są jednakowo ciągłe na $\mathbb{R}_+$, tzn.

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{t_1,t_2\in\mathbb{R}_+}{\forall}\ \big[|t_1-t_2|\leqslant\delta \Rightarrow |a_n(t_1)-a_n(t_2)|\leqslant\varepsilon\big]$$

Oznaczmy przez A normę elementu $(a_n(t))$ w przestrzeni BC_∞ tzn.

$$A = \|(a_n(t))\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}_+}\big\{\|(a_n(t))\|_{l_\infty}\big\} = \sup_{t\in\mathbb{R}_+}\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n(t)|\right\}.$$

(*ii*) Funkcje $k_n(t,s) = k_n : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ są ciągłe na zbiorze $\mathbb{R}^2_+$ $(n = 1,2,\dots)$. Oprócz tego funkcje $t \to k_n(t,s)$ są jednakowo ciągłe na zbiorze $\mathbb{R}_+$ jednostajnie względem $s\in\mathbb{R}_+$ tzn. spełniony jest następujący warunek

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{s\in\mathbb{R}_+}{\forall}\ \underset{t_1,t_2\in\mathbb{R}_+}{\forall}\ \Big[|t_2-t_1|\leqslant\delta \Rightarrow |k_n(t_2,s)-k_n(t_1,s)|\leqslant\varepsilon\Big].$$

(*iii*) Istnieje stała $K_1 > 0$ taka, że

$$\int_0^t |k_n(t,s)|ds \leqslant K_1$$

dla każdego $t\in\mathbb{R}_+$ oraz $n = 1,2,\dots$.

(*iv*) Ciąg $(k_n(t,s))$ jest ograniczony na $\mathbb{R}_+^2$ tzn. że istnieje stała $K_2 > 0$ taka, że

$$|k_n(t,s)| \leqslant K_2$$

dla $t, s \in \mathbb{R}_+$ oraz $n = 1, 2, \ldots$.

(*v*) Funkcje f_n są zdefiniowane na zbiorze $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^\infty$ i przyjmują wartości rzeczywiste dla $n = 1, 2, \ldots$. Ponadto funkcje $t \to f_n(t, x_1, x_2, \ldots)$ są jednakowo ciągłe na $\mathbb{R}_+$ jednostajnie względem $x = (x_n) \in l_\infty$ tzn. spełniony jest następujący warunek

$$\bigvee_{\varepsilon>0} \ \exists_{\delta>0} \ \bigvee_{(x_i)\in l_\infty} \ \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \ \bigvee_{t_1,t_2\in\mathbb{R}_+} \Big[|t_2 - t_1| \leqslant \delta$$

$$\Rightarrow |f_n(t_2, x_1, x_2, \ldots) - f_n(t_1, x_1, x_2, \ldots)| \leqslant \varepsilon\Big].$$

(*vi*) Istnieje funkcja $l : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ niemalejąca na $\mathbb{R}_+$, ciągła w zerze i taka, że $l(0) = 0$, oraz spełniony jest poniższy warunek

$$|f_n(t, x_1, x_2, \ldots) - f_n(t, y_1, y_2, \ldots)| \leqslant l(r) \sup \big\{|x_i - y_i| : i \geqslant n\big\}$$

dla każdego $r > 0$, oraz dla $x = (x_i)$, $y = (y_i) \in l_\infty$ takich, że $\|x\|_{l_\infty} \leqslant r$, $\|y\|_{l_\infty} \leqslant r$, a także dla wszystkich $t \in \mathbb{R}_+$ oraz $n = 1, 2, \ldots$.

(*vii*) Ciąg funkcji $(\overline{f}_n)$, gdzie $\overline{f}_n(t) = |f_n(t, 0, 0, \ldots)|$ jest elementem przestrzeni BC_∞.

Zauważmy, że z założenia (*vii*) wynika, że możemy określić skończoną stałą

$$\overline{F} = \sup \big\{\overline{f}_n(t) : t \in \mathbb{R}_+, n = 1, 2, \ldots\big\}.$$

Poniżej formułujemy pozostałe założenia, pod jakimi będziemy rozważać układ (5.1).

(*viii*) Funkcje g_n są określone na zbiorze $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^\infty$ i przyjmują wartości rzeczywiste dla $n = 1, 2, \ldots$. Ponadto istnieje funkcja $m : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ niemalejąca na $\mathbb{R}_+$, ciągła w $r = 0$, i taka że $m(0) = 0$, oraz spełniony jest następujący warunek

$$|g_n(t, x_1, x_2, \ldots) - g_n(t, y_1, y_2, \ldots)| \leqslant m(r) \sup \big\{|x_i - y_i| : i \geqslant n\big\}$$

dla każdego $r > 0$, oraz dla $x = (x_i)$, $y = (y_i) \in l_\infty$ takich, że $\|x\|_{l_\infty} \leqslant r$, $\|y\|_{l_\infty} \leqslant r$ i dla wszystkich $t \in \mathbb{R}_+$ oraz $n = 1, 2, \ldots$.

(ix) Operator g zdefiniowany na zbiorze $\mathbb{R}_+ \times l_\infty$ wzorem

$$(gx)(t) = (g_n(t,x)) = (g_1(t,x), g_2(t,x), \dots)$$

jest ograniczony tzn. istnieje dodatnia stała $\overline{g}$ taka, że

$$\|(gx)(t)\|_{l_\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |g_n(t,x)| \leqslant \overline{g}$$

dla każdego $x \in l_\infty$ i dla wszystkich $t \in \mathbb{R}_+$.

(x) Istnieje dodatnia stała $\overline{G}$ taka, że dla dowolnych $t \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ oraz dla wszystkich $x = x(t) = (x_n(t)) \in BC_\infty$ spełniona jest następująca nierówność

$$\int_0^t |g_n(s, x(s))|ds = \int_0^t |g_n(s, x_1(s), x_2(s), \dots)|ds \leqslant \overline{G}.$$

(xi) Istnieje dodatnie rozwiązanie r_0 nierówności

$$A + \overline{F}\,\overline{g}\,K_1 + \overline{g}\,K_1\,r\,l(r) \leqslant r$$

takie, że

$$\overline{g}\,K_1\,l(r_0) + (r_0\,l(r_0) + \overline{F})K_1\,m(r_0) < 1,$$

gdzie stałe A, $\overline{F}$, $\overline{g}$, K_1 zostały opisane wyżej.

Uwaga 5.1.2. Zauważmy, że z założenia (vi) otrzymujemy, że dla każdego $r > 0$ oraz dla $x = (x_i)$, $y = (y_i) \in l_\infty$ takich, że $\|x\|_{l_\infty} \leqslant r$, $\|y\|_{l_\infty} \leqslant r$ oraz dla $t \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, spełniona jest następująca nierówność

$$|f_n(t, x_1, x_2, \dots) - f_n(t, y_1, y_2, \dots)| \leqslant l(r)\|x - y\|_{l_\infty},$$

gdzie $l = l(r)$ jest funkcją z założenia (vi).
Podobnie z założenia $(viii)$ wnioskujemy, że dla $t \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ i dla $r > 0$, oraz $x = (x_i)$, $y = (y_i) \in l_\infty$ takich, że $\|x\|_{l_\infty} \leqslant r$, $\|y\|_{l_\infty} \leqslant r$ zachodzi nierówność

$$|g_n(t, x_1, x_2, \dots) - g_n(t, y_1, y_2, \dots)| \leqslant m(r)\|x - y\|_{l_\infty},$$

gdzie funkcja $m = m(r)$ występuje w założeniu $(viii)$.

Możemy teraz sformułować twierdzenie mówiące o istnieniu rozwiązania nieskończonego układu (5.1).

Twierdzenie 5.1.3. *Jeżeli spełnione są założenia* $(i)-(xi)$, *to nieskończony układ równań całkowych* (5.1) *ma co najmniej jedno rozwiązanie* $x(t) = (x_n(t))$ *w przestrzeni* $BC_\infty = BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$. *Ponadto funkcja* $x = x(t)$ *jest jednostajnie ciągła na przedziale* $\mathbb{R}_+$.

Dowód. Dowód zaczniemy od określenia trzech operatorów F, V, Q w przestrzeni BC_∞ w następujący sposób

$$(Fx)(t) = ((F_nx)(t)) = (f_n(t, x(t))) = (f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots)),$$

$$(Vx)(t) = ((V_nx)(t)) = \Big(\int_0^t k_n(t,s) g_n(s, x_1(s), x_2(s), \dots) ds \Big),$$

$$(Qx)(t) = ((Q_nx)(t)) = (a_n(t) + (F_nx)(t)(V_nx)(t)).$$

Najpierw pokażemy, że operator F przekształca przestrzeń BC_∞ w siebie.

W tym celu wybierzmy dowolnie funkcję $x = x(t) = (x_n(t)) \in BC_\infty$. Ustalmy liczbę $n \in \mathbb{N}$ oraz $t \in \mathbb{R}_+$. Następnie w świetle narzuconych warunków i Uwagi 5.1.2 otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} |(F_nx)(t)| &\leqslant |f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots) - f_n(t, 0, 0, \dots)| + |f_n(t, 0, 0, \dots)| \\ &\leqslant l(\|x(t)\|_{l_\infty}) \sup \big\{ |x_i(t)| : i \geqslant n \big\} + |\overline{f}_n(t)| \\ &\leqslant l(\|x\|_{BC_\infty}) \|x\|_{BC_\infty} + \overline{F}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

W szczególności uzyskane oszacowanie pokazuje, że funkcja Fx jest ograniczona na przedziale $\mathbb{R}_+$.

Następnie pokażemy, że funkcja Fx jest ciągła na $\mathbb{R}_+$. W tym celu wykorzystamy fakt ciągłości ustalonej funkcji $x = x(t) = (x_n(t)) \in BC_\infty$ na przedziale $\mathbb{R}_+$. Oznacza ona, że spełniony jest następujący warunek

$$\underset{t_0 \in \mathbb{R}_+}{\forall} \ \underset{\varepsilon > 0}{\forall} \ \underset{\delta > 0}{\exists} \ \underset{t \in \mathbb{R}_+}{\forall} \ \big[|t - t_0| \leqslant \delta \Rightarrow \|x(t) - x(t_0)\|_{l_\infty} \leqslant \varepsilon \big]. \tag{5.3}$$

Dalej ustalmy $\varepsilon > 0$ oraz $t_0 \in \mathbb{R}_+$ i wybierzmy $\delta > 0$ tak, aby zachodził warunek (5.3). Następnie dla $t \in \mathbb{R}_+$ takich, że $|t - t_0| \leqslant \delta$, uwzględniając Uwagę 5.1.2

otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
|(F_n x)(t) - (F_n x)(t_0)| &= |f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots) - f_n(t_0, x_1(t_0), x_2(t_0), \dots)| \\
&\leqslant |f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots) - f_n(t_0, x_1(t), x_2(t), \dots)| \\
&\quad + |f_n(t_0, x_1(t), x_2(t), \dots) - f_n(t_0, x_1(t_0), x_2(t_0), \dots)| \\
&\leqslant |f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots) - f_n(t_0, x_1(t), x_2(t), \dots)| \\
&\quad + l(\|x(t)\|_{l_\infty}) \|x(t) - x(t_0)\|_{l_\infty} \\
&\leqslant |f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots) - f_n(t_0, x_1(t), x_2(t), \dots)| + l(\|x\|_{BC_\infty})\, \varepsilon. \qquad (5.4)
\end{aligned}
$$

Następnie biorąc pod uwagę założenie (v), możemy wybrać liczbę $\delta > 0$ w ten sposób, że

$$|f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots) - f_n(t_0, x_1(t), x_2(t), \dots)| \leqslant \varepsilon$$

dla $|t - t_0| \leqslant \delta$ oraz dla $n = 1, 2, \dots$. Łącząc to z (5.4), otrzymujemy następujące oszacowanie

$$|(F_n x)(t) - (F_n x)(t_0)| \leqslant \big(1 + l(\|x\|_{BC_\infty})\big)\, \varepsilon$$

dla $n = 1, 2, \dots$ oraz dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$ takiego, że $|t - t_0| \leqslant \delta$. To pokazuje, że funkcja Fx jest ciągła w punkcie $t_0 \in \mathbb{R}_+$. Ponieważ t_0 był wybrany dowolnie wnioskujemy, że funkcja Fx jest ciągła na $\mathbb{R}_+$.
Łącząc powyżej wykazaną ciągłość Fx z wcześniej pokazaną ograniczonością Fx stwierdzamy, że operator F przekształca przestrzeń BC_∞ w siebie.

Dalej pokażemy, że operator V zdefiniowany wyżej przekształca przestrzeń BC_∞ w siebie.
W tym celu, podobnie jak powyżej, ustalmy funkcję $x = x(t) = (x_n(t)) \in BC_\infty$. Następnie, dla dowolnie ustalonych liczb $t \in \mathbb{R}_+$ oraz $n \in \mathbb{N}$, w oparciu o założenia (iii) oraz (ix) mamy, że

$$
\begin{aligned}
|(V_n x)(t)| &\leqslant \int_0^t |k_n(t,s)||g_n(s, x_1(s), x_2(s), \dots)| ds \\
&\leqslant \int_0^t |k_n(t,s)|\, \overline{g}\; ds \leqslant \overline{g} \int_0^t |k_n(t,s)| ds \leqslant \overline{g} K_1. \qquad (5.5)
\end{aligned}
$$

W szczególności uzyskane oszacowanie pokazuje, że funkcja Vx jest ograniczona na przedziale $\mathbb{R}_+$.

Następnie ustalmy $\varepsilon > 0$ i wybierzmy liczbę $\delta > 0$ tak, aby spełniony było założenie (ii). Wtedy dla dowolnych $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ takich, że $|t_2 - t_1| \leqslant \delta$, na podstawie założeń (ii) oraz (ix) (zakładając na przykład, że $t_1 < t_2$) otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
&|(V_n x)(t_2) - (V_n x)(t_1)| \\
&\quad \leqslant \left| \int_0^{t_2} k_n(t_2, s) g_n(s, x_1(s), x_2(s), \dots) ds - \int_0^{t_2} k_n(t_1, s) g_n(s, x_1(s), x_2(s), \dots) ds \right| \\
&\quad\quad + \left| \int_0^{t_2} k_n(t_1, s) g_n(s, x_1(s), x_2(s), \dots) ds - \int_0^{t_1} k_n(t_1, s) g_n(s, x_1(s), x_2(s), \dots) ds \right| \\
&\quad \leqslant \int_0^{t_2} |k_n(t_2, s) - k_n(t_1, s)| |g_n(s, x_1(s), x_2(s), \dots)| ds \\
&\quad\quad + \int_{t_1}^{t_2} |k_n(t_1, s)| |g_n(s, x_1(s), x_2(s), \dots)| ds \\
&\quad \leqslant \int_0^{t_2} \omega_k(\delta) |g_n(s, x_1(s), x_2(s), \dots)| ds + \int_{t_1}^{t_2} K_2 |g_n(s, x_1(s), x_2(s), \dots)| ds,
\end{aligned}
$$

gdzie K_2 jest stałą z założenia (iv), natomiast $\omega_k(\delta)$ oznacza zwykły moduł jednakowej ciągłości ciągu funkcji $t \to k_n(t, s)$ na $\mathbb{R}_+$ (zgodnie z założeniem (iii)). Oczywiście mamy, że $\omega_k(\delta) \to 0$ dla $\delta \to 0$.

Zauważmy następnie, że korzystając z założeń (ix) oraz (x), powyższe oszacowanie prowadzi nas do kolejnego

$$
|(V_n x)(t_2) - (V_n x)(t_1)| \leqslant \overline{G}\, \omega_k(\delta) + \overline{g} K_2\, \delta. \tag{5.6}
$$

Zatem mamy, że

$$
\|(Vx)(t_2) - (Vx)(t_1)\|_{l_\infty} \leqslant \overline{G}\, \omega_k(\delta) + \overline{g} K_2\, \delta.
$$

To pokazuje, że funkcja Vx jest ciągła na przedziale $\mathbb{R}_+$. Łącząc ograniczoność funkcji Vx z jej ciągłościa na $\mathbb{R}_+$ wnioskujemy, że operator V przekształca przestrzeń BC_∞ w siebie.

Biorąc pod uwagę fakt, że przestrzeń $BC_\infty = BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$ jest algebrą Banacha względem mnożenia po współrzędnych ciągów funkcji oraz uwzględniając definicję operatora Q oraz założenie (i), wnioskujemy, że dla dowolnie ustalonej funkcji $x = x(t) \in BC_\infty$ funkcja $(Qx)(t) = ((Q_n x)(t)) = (a_n(t) + (F_n x)(t)(V_n x)(t))$ przekształca przedział $\mathbb{R}_+$ w przestrzeń l_∞.
Rzeczywiście, mając na względzie fakt, że $((F_n x)(t)) \in l_\infty$ dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$ oraz w świetle oszacowań (5.5) oraz (5.2) otrzymujemy

$$\begin{aligned}|(Q_n x)(t)| &\leqslant |a_n(t)| + |(F_n x)(t)||(V_n x)(t)| \\ &\leqslant |a_n(t)| + |(F_n x)(t)|\overline{g}K_1\end{aligned}$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Oznacza to, że $(Qx)(t) = ((Q_n x)(t)) \in l_\infty$ dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$. W podobny sposób uzyskujemy ograniczoność funkcji Qx na $\mathbb{R}_+$, jeżeli uwzględnimy dodatkowo założenie (i). Następnie zauważmy, że ciągłość funkcji Qx na $\mathbb{R}_+$ wynika wprost z ciągłości funkcji Fx oraz Vx na przedziale $\mathbb{R}_+$.
Ostatecznie łącząc wszystkie wyżej pokazane własności funkcji Qx wnioskujemy, że operator Q przekształca przestrzeń BC_∞ w siebie.

Zauważmy teraz, że na podstawie oszacowań (5.2) oraz (5.5), dla dowolnie ustalonych $n \in \mathbb{N}$ oraz $t \in \mathbb{R}_+$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}|(Q_n x)(t)| &\leqslant |a_n(t)| + |(F_n x)(t)||(V_n x)(t)| \\ &\leqslant A + \Big[l(\|x(t)\|_{l_\infty})\|x(t)\|_{l_\infty} + \overline{F}\Big]\overline{g}K_1 \\ &\leqslant A + \overline{F}\,\overline{g}\,K_1 + \overline{g}\,K_1\,l(\|x\|_{BC_\infty})\|x\|_{BC_\infty}.\end{aligned}$$

Stąd dostajemy następujące oszacowanie

$$\|Qx\|_{BC_\infty} \leqslant A + \overline{F}\,\overline{g}\,K_1 + \overline{g}\,K_1\,l(\|x\|_{BC_\infty})\|x\|_{BC_\infty}.$$

Z powyższej nierówności i założenia (xi) wynika, że istnieje liczba $r_0 > 0$ taka, że operator Q przkształca kulę $\overline{B}_{r_0}$ (w przestrzeni BC_∞) w siebie. Inaczej mówiąc, istnieje taka liczba $r_0 > 0$, że dla każdego $x \in BC_\infty$ takiego, że $\|x\|_{BC_\infty} \leqslant r_0$ wartość operatora $(Qx)(t)$ spełnia nierówność $\|(Qx)(t)\|_{BC_\infty} \leqslant r_0$, tzn.

$$\begin{aligned}\|Qx\|_{BC_\infty} &\leqslant A + \overline{F}\,\overline{g}\,K_1 + \overline{g}\,K_1\,l(\|x\|_{BC_\infty})\|x\|_{BC_\infty} \\ &\leqslant A + \overline{F}\,\overline{g}\,K_1 + \overline{g}\,K_1\,l(r_0)\,r_0 \leqslant r_0.\end{aligned}$$

W dalszej części pokażemy, że operator Q jest ciągły na kuli $\overline{B}_{r_0}$. W tym celu, biorąc pod uwagę postać operatora Q, wystarczy pokazać ciągłość operatorów F oraz V osobno.
Ustalmy zatem dowolną liczbę $\varepsilon > 0$ i wybierzmy $x \in \overline{B}_{r_0}$. Następnie weźmy dowolny punkt $y \in \overline{B}_{r_0}$ tak, aby $\|x-y\|_{BC_\infty} \leqslant \varepsilon$. Wtedy, dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$ oraz dla $t \in \mathbb{R}_+$, biorąc pod uwagę założenie (vi) i Uwagę 5.1.2, mamy

$$\begin{aligned}|(F_nx)(t)-(F_ny)(t)| &= |f_n(t,x_1(t),x_2(t),\dots)-f_n(t,y_1(t),y_2(t),\dots)|\\ &\leqslant l(r_0)\|x-y\|_{BC_\infty} \leqslant l(r_0)\,\varepsilon.\end{aligned}$$

Zatem otrzymujemy, że

$$\|Fx-Fy\|_{BC_\infty} \leqslant l(r_0)\,\varepsilon.$$

Z tego oszacowania wynika żądana ciągłość operatora F na kuli $\overline{B}_{r_0}$.

Następnie wybierzmy dowolne punkty $x=(x_i)$, $y=(y_i) \in \overline{B}_{r_0}$. Wtedy, uwzględniając założenie $(viii)$, dla ustalonych $t \in \mathbb{R}_+$ oraz $n \in \mathbb{N}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}&|(V_nx)(t)-(V_ny)(t)|\\ &\quad\leqslant \int_0^t |k_n(t,s)||g_n(s,x_1(s),x_2(s),\dots)-g_n(s,y_1(s),y_2(s),\dots)|ds\\ &\quad\leqslant \int_0^t |k_n(t,s)|m(r_0)\sup\big\{|x_i(s)-y_i(s)| : i \geqslant n\big\}ds\\ &\quad\leqslant m(r_0)\int_0^t |k_n(t,s)|\big(\|x(s)-y(s)\|_{l_\infty}\big)ds\\ &\quad\leqslant m(r_0)\sup\big\{\|x(u)-y(u)\|_{l_\infty} : u \in \mathbb{R}_+\big\}\int_0^t |k_n(t,s)|ds.\end{aligned}$$

Zatem, biorąc pod uwagę założenie (iii), otrzymujemy następującą nierówność

$$|(V_nx)(t)-(V_ny)(t)| \leqslant K_1m(r_0)\|x-y\|_{BC_\infty}.$$

W konsekwencji mamy

$$\|Vx-Vy\|_{BC_\infty} \leqslant K_1m(r_0)\|x-y\|_{BC_\infty}.$$

Na podstawie wyżej uzyskanego oszacowania stwierdzamy, że operator V jest ciągły na kuli $\overline{B}_{r_0}$. Pokazana została zatem ciągłość operatora Q na kuli $\overline{B}_{r_0}$.

Rozważmy teraz pierwszy składnik miary niezwartości μ_c^3, to znaczy wielkość ω_0^∞ określoną wzorem (4.26). Ustalmy dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$. Następnie wybierzmy $t, s \in \mathbb{R}_+$ tak, aby $|t-s| \leqslant \varepsilon$, a także weźmy niepusty podzbiór X kuli $\overline{B}_{r_0}$. Wtedy, dla funkcji $x = x(t) = (x_n(t)) \in X$ oraz dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n, szacując podobnie jak w (5.4), mamy

$$\begin{aligned} |(F_n x)(t) - (F_n x)(s)| &\leqslant l(r_0) \sup \{|x_i(t) - x_i(s)| : i \geqslant n\} \\ &\quad + \sup \{|f_n(t, x_1, x_2, \dots) - f_n(s, x_1, x_2, \dots)| : |t - s| \leqslant \varepsilon, \|(x_n)\|_{l_\infty} \leqslant r_0\} \\ &\leqslant l(r_0)\, \omega^\infty(x, \varepsilon) + \omega_\infty^1(f, \varepsilon), \end{aligned} \tag{5.7}$$

gdzie

$$\begin{aligned} &\omega_\infty^1(f, \varepsilon) \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \Big\{ \sup \{|f_n(t, x_1, x_2, \dots) - f_n(s, x_1, x_2, \dots)| : |t - s| \leqslant \varepsilon, \|(x_n)\|_{l_\infty} \leqslant r_0\} \Big\}. \end{aligned}$$

W świetle założenia (v) mamy, że $\omega_\infty^1(f, \varepsilon) \to 0$ dla $\varepsilon \to 0$.
Teraz z oszacowania (5.7) dedukujemy, że

$$\omega^\infty(Fx, \varepsilon) \leqslant l(r_0)\, \omega^\infty(x, \varepsilon) + \omega_\infty^1(f, \varepsilon). \tag{5.8}$$

Zauważmy dalej, że pod tymi samymi warunkami jak powyżej, zakładając dodatkowo, że $t > s$, podobnie jak w (5.6) otrzymujemy następujące oszacowanie

$$|(V_n x)(t) - (V_n x)(s)| \leqslant \overline{G}\, \omega_k(\varepsilon) + \overline{g}\, K_2\, \varepsilon,$$

gdzie symbol $\omega_k(\varepsilon)$ oznacza wcześniej wprowadzony moduł jednakowej ciągłości ciągu funkcji $t \to k_n(t, \tau)$ tzn.,

$$\omega_k(\varepsilon) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \Big\{ \sup \{|k_n(t, \tau) - k_n(s, \tau)| : t, s, \tau \in \mathbb{R}_+, \tau \leqslant t, \tau \leqslant s, |t - s| \leqslant \varepsilon\} \Big\}.$$

Oczywiście $\omega_k(\varepsilon) \to 0$ dla $\varepsilon \to 0$.
Następnie zanotujmy, że z powyższego oszacowania otrzymujemy

$$\omega^\infty(Vx, \varepsilon) \leqslant \overline{G}\, \omega_k(\varepsilon) + \overline{g}\, K_2\, \varepsilon. \tag{5.9}$$

Dalej, dla ustalonej funkcji $x \in X$ oraz dla dowolnych liczb $t, s \in \mathbb{R}_+$, uwzględniając postać operatora Q otrzymujemy

$$\begin{aligned}\|(Qx)(t) - (Qx)(s)\|_{l_\infty} &= \big\|\big(a(t) + (Fx)(t)(Vx)(t)\big) - \big(a(s) + (Fx)(s)(Vx)(s)\big)\big\| \\ &\leqslant \|a(t) - a(s)\|_{l_\infty} + \|(Vx)(t)\|_{l_\infty}\|(Fx)(t) - (Fx)(s)\|_{l_\infty} \\ &\quad + \|(Fx)(s)\|_{l_\infty}\|(Vx)(t) - (Vx)(s)\|_{l_\infty},\end{aligned}$$

gdzie oznaczono $a(t) = (a_n(t))$.
Następnie ustalmy $\varepsilon > 0$ i załóżmy, że $|t - s| \leqslant \varepsilon$. Wykorzystując (5.8), (5.9), (5.3) oraz (5.5), otrzymujemy z powyższej nierówności oszacowanie

$$\begin{aligned}\omega^\infty(Qx, \varepsilon) &\leqslant \omega^\infty(a, \varepsilon) + \overline{g}\, K_1\, \omega^\infty(Fx, \varepsilon) \\ &\quad + (r_0\, l(r_0) + \overline{F})(\overline{G}\, \omega_k(\varepsilon) + \overline{g}\, K_2\, \varepsilon) \\ &\leqslant \omega^\infty(a, \varepsilon) + \overline{g}\, K_1 \Big[l(r_0)\, \omega^\infty(x, \varepsilon) + \omega^1_\infty(f, \varepsilon)\Big] \\ &\quad + (r_0\, l(r_0) + \overline{F})(\overline{G}\, \omega_k(\varepsilon) + \overline{g}\, K_2\, \varepsilon).\end{aligned}$$

Zatem, mając na uwadze pokazane wyżej własności funkcji $\varepsilon \to \omega^1_\infty(f, \varepsilon)$, oraz $\varepsilon \to \omega_k(\varepsilon)$, a także założenie (i) dostajemy nierówność

$$\omega^\infty_0(QX) \leqslant \overline{g}\, K_1\, l(r_0)\, \omega^\infty_0(X). \tag{5.10}$$

W następnej części rozważymy drugi składnik miary niezwartości μ^3_c zdefiniowanej wzorem (4.35) dla $i = 3$. Ten składnik został oznaczony jako $\overline{\mu}^3_\infty$ i opisuje go wzór (4.29). Wybierzmy zbiór $X \subset \overline{B}_{r_0}$ oraz ustalmy dowolnie funkcje $x = x(t), y = y(t) \in X$. Wtedy, dla dowolnych $t \in \mathbb{R}_+$ oraz $k \in \mathbb{N}$, mamy

$$\begin{aligned}|(Q_k x)(t) - (Q_k y)(t)| &= |(F_k x)(t)(V_k x)(t) - (F_k y)(t)(V_k y)(t)| \\ &\leqslant |(V_k x)(t)||(F_k x)(t) - (F_k y)(t)| + |(F_k y)(t)||(V_k x)(t) - (V_k y)(t)|. \end{aligned} \tag{5.11}$$

W dalszej części będziemy szacowali składniki występujące po prawej stronie nierówności (5.11).
Zatem ustalmy liczbę naturalną n oraz wartość $T > 0$. Następnie dla $t \in [0, T]$ oraz dla $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant n$, na podstawie założeń $(viii)$ oraz (iii), dla dowolnie wybranych

funkcji $x, y \in X$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&|(V_p x)(t) - (V_p y)(t)| \\
&\qquad \leqslant \int\limits_0^t |k_p(t,s)||g_p(s, x_1(s), x_2(s), \dots) - g_p(s, y_1(s), y_2(s), \dots)| ds \\
&\qquad \leqslant m(r_0) \int\limits_0^t |k_p(t,s)| \Big(\sup \big\{ |x_i(s) - y_i(s)| : i \geqslant p \big\} \Big) ds \\
&\qquad \leqslant m(r_0) \int\limits_0^t |k_p(t,s)| \left\{ \sup_{t \in [0,T]} \left\{ \sup_{i \geqslant n} |x_i(t) - y_i(t)| \right\} \right\} ds \\
&\qquad \leqslant K_1 \, m(r_0) \left\{ \sup_{t \in [0,T]} \left\{ \sup_{i \geqslant n} \Big\{ \sup \big\{ |x_i(t) - y_i(t)| : x = x(t), y = y(t) \in X \big\} \Big\} \right\} \right\}.
\end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\sup_{t \in [0,T]} \left\{ \sup_{p \geqslant n} \Big\{ \sup \big\{ |(V_p x)(t) - (V_p y)(t)| : x = x(t), y = y(t) \in X \big\} \Big\} \right\} \\
&\qquad \leqslant K_1 \, m(r_0) \left\{ \sup_{t \in [0,T]} \left\{ \sup_{i \geqslant n} \Big\{ \sup \big\{ |x_i(t) - y_i(t)| : x = x(t), y = y(t) \in X \big\} \Big\} \right\} \right\}.
\end{aligned}$$

Powyższe oszacowanie prowadzi do nierówności (por. wzór (4.29)):

$$\overline{\mu}^3_\infty(VX) \leqslant K_1 \, m(r_0) \, \overline{\mu}^3_\infty(X). \tag{5.12}$$

Podobnie jak powyżej, dla dowolnie ustalonych $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}_+$ oraz $x = x(t)$, $y = y(t) \in X$, wykorzystując założenie (vi), dostajemy

$$|(F_n x)(t) - (F_n y)(t)| \leqslant l(r_0) \sup \big\{ |x_i(t) - y_i(t)| : i \geqslant n \big\}.$$

Stąd wyprowadzamy następujące oszacowanie

$$\begin{aligned}
&\sup_{t \in [0,T]} \left\{ \sup_{i \geqslant n} \Big\{ \sup \big\{ |(F_i x)(t) - (F_i y)(t)| : x = x(t), y = y(t) \in X \big\} \Big\} \right\} \\
&\qquad \leqslant l(r_0) \left\{ \sup_{t \in [0,T]} \left\{ \sup_{i \geqslant n} \Big\{ \sup \big\{ |x_i(t) - y_i(t)| : x = x(t), y = y(t) \in X \big\} \Big\} \right\} \right\}.
\end{aligned}$$

Mając na uwadze wyżej wykazaną nierówność oraz wzór (4.29), otrzymujemy następującą nierówność

$$\overline{\mu}_{\infty}^{3}(FX) \leqslant l(r_0)\, \overline{\mu}_{\infty}^{3}(X). \tag{5.13}$$

Ostatecznie łącząc oszacowania (5.11), (5.5), (5.2), (5.12) oraz (5.13), dostajemy

$$\overline{\mu}_{\infty}^{3}(QX) \leqslant \overline{g}\, K_1\, l(r_0)\, \overline{\mu}_{\infty}^{3}(X) + \Big(l(r_0)\, r_0 + \overline{F}\Big) K_1\, m(r_0)\, \overline{\mu}_{\infty}^{3}(X). \tag{5.14}$$

W kolejnej części naszych rozważań weźmy pod uwagę trzeci składnik miary niezwartości μ_c^3 określonej wzorem (4.35) tzn. element $c(X)$ wyrażony wzorem (4.32). Ustalmy zatem niepusty zbiór $X \subset \overline{B}_{r_0}$, oraz weźmy funkcje $x = x(t)$, $y = y(t) \in X$. Następnie ustalmy $T > 0$ oraz wybierzmy $t \geqslant T$. Wtedy, dla dowolnie wybranej liczby naturalnej n, na podstawie rachunków prowadzonych przed (5.12), otrzymujemy

$$|(V_n x)(t) - (V_n y)(t)| \leqslant K_1\, m(r_0) \left\{ \sup_{t \geqslant T} \left\{ \sup_{i \geqslant n} |x_i(t) - y_i(t)| \right\} \right\} .$$

Powyższe oszacowanie prowadzi do nierówności

$$\begin{aligned} &\sup_{t \geqslant T} \left\{ \sup \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} |(V_n x)(t) - (V_n y)(t)| : x = x(t), y = y(t) \in X \right\} \right\} \\ &\quad \leqslant K_1\, m(r_0) \left\{ \sup_{t \geqslant T} \left\{ \sup \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n(t) - y_n(t)| : x = x(t), y = y(t) \in X \right\} \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Ostatecznie dostajemy, że

$$c(VX) \leqslant K_1\, m(r_0)\, c(X). \tag{5.15}$$

Następnie, argumentując podobnie jak w rachunkach poprzedzających oszacowanie (5.13), otrzymujemy następującą nierówność

$$c(FX) \leqslant l(r_0)\, c(X). \tag{5.16}$$

Ostatecznie łącząc oszacowania (5.15), (5.16), (5.2), (5.5) oraz (5.11) dostajemy

$$c(QX) \leqslant \overline{g}\, K_1\, l(r_0)\, c(X) + \Big(l(r_0)\, r_0 + \overline{F}\Big) K_1\, m(r_0)\, c(X). \tag{5.17}$$

Teraz, łącząc (5.10), (5.14), (5.17) oraz uwzględniając wzór (4.35) definiujący miarę niezwartości μ_c^3, mamy

$$\begin{aligned}\mu_c^3(QX) \leqslant & \overline{g}\, K_1\, l(r_0)\, \omega_0^\infty(X) \\ & + \Big[\overline{g}\, K_1\, l(r_0) + (r_0\, l(r_0) + \overline{F}) K_1\, m(r_0)\Big]\overline{\mu}_\infty^3(X) \\ & + \Big[\overline{g}\, K_1\, l(r_0) + (r_0\, l(r_0) + \overline{F}) K_1\, m(r_0)\Big] c(X).\end{aligned}$$

Stąd wyprowadzamy następujące oszacowanie

$$\mu_c^3(QX) \leqslant \Big[\overline{g}\, K_1\, l(r_0) + (r_0\, l(r_0) + \overline{F}) K_1\, m(r_0)\Big]\mu_c^3(X). \tag{5.18}$$

Biorąc pod uwagę uzyskane wyżej oszacowanie, założenie (xi) oraz Twierdzenie 1.1 wnioskujemy, że istnieje co najmniej jeden element $x \in \overline{B}_{r_0}$, który jest punktem stałym operatora Q w kuli $\overline{B}_{r_0}$. Oczywiście funkcja $x = x(t)$ jest rozwiązaniem nieskończonego układu równań całkowych (5.1) w przestrzeni BC_∞.

Ponadto, w świetle Uwagi 1.2 oraz opisu jąder miar niezwartości μ_a, μ_b, μ_c umieszczonego po dowodzie Twierdzenia 4.1.4 wnioskujemy, że funkcja $x = x(t)$ jest jednostajnie ciągła na przedziale $\mathbb{R}_+$.
Koniec dowodu. □

Pokażemy teraz przykład ilustrujący rezultat Twierdzenia 5.1.3.

Przykład 5.1.4. Rozważmy następujący nieskończony układ nieliniowych kwadratowych równań całkowych typu Volterry-Hammersteina

$$\begin{aligned} x_n(t) = & \sin\left(\frac{nt+1}{t+n}\right) \\ & + \left(\frac{x_n(t)}{n + x_n^2(t)} + \frac{x_{n+1}^2(t)}{n+1} + \frac{x_{n+2}^3(t)}{n+2}\right)\int_0^t \frac{s}{n+s^2+t^2} \cdot \frac{\operatorname{arctg}\big(x_n^2(s) + x_{n+1}^2(s)\big)}{\beta + n + s^2}\, ds, \end{aligned} \tag{5.19}$$

dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz $t \in \mathbb{R}_+$. Dodatkowo β jest dodatnią stałą, która zostanie sprecyzowana w dalszym ciągu. Zauważmy, że nieskończony układ (5.19) jest szczególnym przypadkiem układu (5.1), jeżeli przyjmiemy

$$a_n(t) = \sin\left(\frac{nt+1}{t+n}\right), \tag{5.20}$$

$$f_n(t,x_1,x_2,\dots) = \frac{x_n}{n+x_n^2} + \frac{x_{n+1}^2}{n+1} + \frac{x_{n+2}^3}{n+2}, \tag{5.21}$$

$$k_n(t,s) = \frac{s}{n+s^2+t^2}, \tag{5.22}$$

$$g_n(t,x_1,x_2,\dots) = \frac{\operatorname{arctg}\big(x_n^2+x_{n+1}^2\big)}{\beta+n+t^2} \tag{5.23}$$

dla $n = 1,2,\dots$ oraz $t \in \mathbb{R}_+$.

W celu pokazania, że nieskończony układ równań całkowych (5.19) ma rozwiązanie w przestrzeni Banacha $BC_\infty = BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$ wystarczy zastosować Twierdzenie 5.1.3. W tym celu pokażemy, że funkcje określone wzorami (5.20) - (5.23) spełniają założenia (i) - (xi) Twierdzenia 5.1.3.

Zauważmy najpierw, że funkcje $a_n(t)$ opisane wzorem (5.20) spełniają warunek Lipschitza ze stałą $L = 1$ dla $n = 1,2,\dots$. Zatem te funkcje są jednakowo ciągłe na $\mathbb{R}_+$. Ponadto mamy, że

$$A = \sup\big\{|a_n(t)| : n = 1,2,\dots, t \in \mathbb{R}_+\big\} = 1.$$

Pokazuje to, że założenie (i) jest spełnione.

Następnie zauważmy, że funkcje $f_n = f_n(t,x_1,x_2,\dots)$ dane wzorem (5.21) przekształcają $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^\infty$ w $\mathbb{R}$ $(n = 1,2,\dots)$. Ponadto, biorąc pod uwagę, że funkcje f_n nie zależą wprost od t wnioskujemy, że spełnione jest założenie (v).

W celu wykazania założenia (vi) ustalmy liczbę $r > 0$ oraz weźmy $x = (x_i)$, $y = (y_i) \in l_\infty$ takie aby $\|x\|_{l_\infty} \leqslant r$ oraz $\|y\|_{l_\infty} \leqslant r$. Wtedy uwzględniając wzór (5.21), dla dowolnej liczby naturalnej n, mamy

$$\begin{aligned}&|f_n(t,x_1,x_2,\dots) - f_n(t,y_1,y_2,\dots)|\\ &\qquad\leqslant \left|\frac{x_n}{n+x_n} - \frac{y_n}{n+y_n}\right| + \frac{1}{n+1}\left|x_{n+1}^2 - y_{n+1}^2\right| + \frac{1}{n+2}\left|x_{n+2}^3 - y_{n+2}^3\right|.\end{aligned}$$

Następnie uwzględniając nierówność

$$\left|\frac{x}{n+x^2} - \frac{y}{n+y^2}\right| \leqslant \frac{1}{n}|x-y|,$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&|f_n(t,x_1,x_2,\dots)-f_n(t,y_1,y_2,\dots)| \\
&\quad\leqslant \frac{1}{n}|x_n-y_n|+\frac{1}{n+1}\Big(|x_{n+1}|+|y_{n+1}|\Big)|x_{n+1}-y_{n+1}| \\
&\quad+\frac{1}{n+2}\Big(x_{n+2}^2+|x_{n+2}||y_{n+2}|+y_{n+2}^2\Big)|x_{n+2}-y_{n+2}| \\
&\quad\leqslant \frac{1}{n}|x_n-y_n|+\frac{2r}{n+1}|x_{n+1}-y_{n+1}|+\frac{3r^2}{n+2}|x_{n+2}-y_{n+2}| \\
&\quad\leqslant \max\left\{\frac{1}{n},\frac{2r}{n+1},\frac{3r^2}{n+2}\right\}\big[|x_n-y_n|+|x_{n+1}-y_{n+1}|+|x_{n+2}-y_{n+2}|\big] \\
&\quad\leqslant 3\max\{1,r,r^2\}\sup\big\{|x_i-y_i|:i\geqslant n\big\}.
\end{aligned}$$

Zatem, założenie (vi) jest spełnione dla

$$l(r)=3\max\{1,r,r^2\}.$$

Zauważmy dalej, że $\overline{f}_n(t)=|f_n(t,0,0,\dots)|=0$ dla każdego $n=1,2,\dots$. Zatem funkcje (f_n) spełniają założenie (vii), oraz $\overline{F}=0$.

Następnie widzimy, że funkcje $k_n(t,s)$ definiowane wzorem (5.22) są ciągłe na zbiorze $\mathbb{R}_+^2$. Poza tym, dla dowolnie ustalonych $t_1,t_2\in\mathbb{R}_+$ (bez straty ogólności możemy założyć, że $t_1<t_2$) oraz dla $n\in\mathbb{N}$, $s\in\mathbb{R}_+$, mamy następującą nierówność

$$\begin{aligned}
|k_n(t_2,s)-k_n(t_1,s)| &= \frac{s}{n+s^2+t_1^2}-\frac{s}{n+s^2+t_2^2} \\
&=\frac{s(t_2^2-t_1^2)}{(n+s^2+t_1^2)(n+s^2+t_2^2)}\leqslant\frac{st_1+st_2}{(n+s^2+t_1^2)(n+s^2+t_2^2)}|t_2-t_1| \\
&\leqslant\left(\frac{st_1}{n+s^2+t_1^2}+\frac{st_2}{n+s^2+t_2^2}\right)|t_2-t_1|\leqslant\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)|t_2-t_1|=|t_2-t_1|.
\end{aligned}$$

Powyższe oszacowanie pokazuje, że funkcje $k_n(t,s)$ $(n=1,2,\dots)$ spełniają założenie (ii).

W celu wykazania założeń (iii) oraz (iv) wystarczy zauważyć, że

$$|k_n(t,s)|\leqslant\frac{s}{s^2+n}\leqslant\frac{s}{s^2+1}\leqslant\frac{1}{2}$$

oraz

$$\int_0^t|k_n(t,s)|ds=\frac{1}{2}\int_0^t\frac{2s}{n+s^2+t^2}ds=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+2t^2}{n+t^2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\ln 2$$

dla $n = 1, 2, \ldots$. Zatem założenia (iii) oraz (iv) są spełnione dla następujących stałych

$$K_1 = \frac{1}{2}\ln 2, \quad K_2 = \frac{1}{2}.$$

Następnym naszym krokiem jest wykazanie założenia $(viii)$. W tym celu ustalmy liczbę $r > 0$ oraz weźmy $x = (x_i), y = (y_i) \in l_\infty$ takie, że $\|x\|_{l_\infty} \leqslant r$ oraz $\|y\|_{l_\infty} \leqslant r$. Wtedy uwzględniając wzór (5.23), dla dowolnych $t \in \mathbb{R}_+$ oraz $n \in \mathbb{N}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&|g_n(t, x_1, x_2, \ldots) - g_n(t, y_1, y_2, \ldots)| \\
&\qquad \leqslant \frac{1}{\beta + n + t^2}\Big|\operatorname{arctg}(x_n^2 + x_{n+1}^2) - \operatorname{arctg}(y_n^2 + y_{n+1}^2)\Big| \\
&\qquad \leqslant \frac{1}{\beta + 1}\big|(x_n^2 - y_n^2) + (x_{n+1}^2 - y_{n+1}^2)\big| \\
&\qquad \leqslant \frac{1}{\beta + 1}\Big[|x_n - y_n|\Big(|x_n| + |y_n|\Big) + |x_{n+1} - y_{n+1}|\Big(|x_{n+1}| + |y_{n+1}|\Big)\Big] \\
&\qquad \leqslant \frac{2r}{\beta + 1}\Big(|x_n - y_n| + |x_{n+1} - y_{n+1}|\Big) \\
&\qquad \leqslant \frac{4r}{\beta + 1} \sup\big\{|x_i - y_i| : i \geqslant n\big\}.
\end{aligned}$$

Zatem funkcje $g_n(t, x_1, x_2, \ldots)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ spełniają założenie $(viii)$ z funkcją

$$m(r) = \frac{4r}{\beta + 1}.$$

Poza tym otrzymujemy

$$|g_n(t, x_1, x_2, \ldots)| \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\beta + n} \leqslant \frac{\pi}{2(\beta + 1)}$$

dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $t \in \mathbb{R}_+$. To pokazuje, że założenie (ix) jest spełnione ze stałą

$$\overline{g} = \frac{\pi}{2(\beta + 1)}.$$

Dalej, dla dowolnie ustalonych $n \in \mathbb{N}$ oraz $t \in \mathbb{R}_+$, otrzymujemy

$$\int_0^t |g_n(s, x_1(s), x_2(s), \ldots)|\, ds \leqslant \int\limits_0^t \frac{\operatorname{arctg}\big(x_n^2(s) + x_{n+1}^2(s)\big)}{\beta + n + s^2}\, ds$$

$$\leqslant \frac{\pi}{2}\int\limits_0^t \frac{ds}{\beta + n + s^2} \leqslant \frac{\pi^2}{4\sqrt{\beta + 1}}.$$

Zatem wnioskujemy, że funkcje g_n spełniają założenie (x) ze stałą

$$\overline{G} = \frac{\pi^2}{4\sqrt{\beta+1}}$$

dla $n = 1, 2, \ldots$.

Ostatecznie łącząc powyżej ustalone wartości stałych A, $\overline{F}$, K_1, K_2, $\overline{g}$, $\overline{G}$ oraz uwzględniając wzory wyrażające funkcje $l(r)$ oraz $m(r)$ otrzymujemy, że pierwsza nierówność z założenia (xi) ma postać

$$1 + \frac{3\pi r \ln 2}{4(\beta+1)} \max\{1, r, r^2\} \leqslant r.$$

Biorąc $\beta = 37$, liczba $r = 3/2$ spełnia powyższą nierówność.
Druga nierówność z założenia (xi) dla tak przyjętych stałych $\beta = 37$, $r_0 = 3/2$ przyjmuje postać

$$\frac{27\pi \ln 2}{608} + \frac{243 \ln 2}{304} < 1.$$

Ta nierówność jest prawdziwa, zatem założenie (xi) jest spełnione.

Zatem stosując Twierdzenie 5.1.3 wnioskujemy, że nieskończony układ równań całkowych (5.19) ma co najmniej jedno rozwiązanie $x(t) = (x_n(t))$ zawarte w kuli $\overline{B}_{3/2}$ w przestrzeni BC_∞. To rozwiązanie jest jednostajnie ciągłe na przedziale $\mathbb{R}_+$.

5.2 Istnienie rozwiązań nieskończonych układów równań całkowych w klasie ciągów funkcyjnych jednakowo znikających w nieskończoności

W tej części pracy będziemy studiować bardziej ogólny nieskończony układ nieliniowych równań całkowych. Rozważania będą prowadzone w tej samej przestrzeni Banacha $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$, ale wykorzystana zostanie inna z miar niezwartości określonych wcześniej. To podejście pozwoli nam uzyskać rezultat egzystencjalny dotyczący wspomnianego układu, lecz pod słabszymi warunkami niż te, które występują we wcześniejszym podrozdziale. Zatem ten rezultat jest pewnym uogólnieniem wcześniej podanego wyniku.

Jak już zostało wcześniej wspomniane, nasze rozważania będą dotyczyć przestrzeni Banacha $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty) = BC_\infty$ opisanej wcześniej. Będziemy używać miary niezwartości $\mu_a^i(X)$ wyrażonej wzorem (4.33) (dla $i = 1$). Dokładniej mówiąc ta miara jest określona następująco

$$\mu_a^1(X) = \omega_0^\infty(X) + \overline{\mu}_\infty^1(X) + a_\infty(X), \tag{5.24}$$

gdzie składniki ω_0^∞, $\overline{\mu}_\infty^1$ oraz a_∞ są opisane odpowiednio wzorami (4.26), (4.27) oraz (4.30), które tu przypomnimy:

$$\omega_0^\infty(X) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\sup_{x\in X}\left\{\sup\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n(t) - x_n(s)| : t, s \in \mathbb{R}_+, |t-s| \leqslant \varepsilon\right\}\right\}\right\},$$

$$\overline{\mu}_\infty^1(X) = \lim_{T\to\infty}\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left\{\lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{x=x(t)\in X}\left\{\sup\left\{|x_k(t)| : k \geqslant n\right\}\right\}\right\}\right\}\right\},$$

$$a_\infty(X) = \lim_{T\to\infty}\left\{\sup_{x=x(t)\in X}\left\{\sup\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n(t)| : t \geqslant T\right\}\right\}\right\}.$$

Uwaga 5.2.1. Bardzo istotna jest obserwacja, że do jądra miary μ_c^3, której będziemy używać, należą takie zbiory X z przestrzeni $BC_\infty = BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$, że elementy tych zbiorów są ciągami funkcyjnymi określonymi na $\mathbb{R}_+$ i m.in. takimi, że są to ciągi jednakowo znikające w nieskończoności. Dokładniej mówiąc, jądro $\ker \mu_a^1$ miary μ_a^1 składa się z ograniczonych podzbiorów X przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$ takich, że funkcje z X są jednakowo ciągłe na $\mathbb{R}_+$ i zmierzają do zera z tą samą prędkością, tzn. jednostajnie ze względu na zbiór X. Ponadto, wszystkie przekroje $X(t) = \{x(t) : x \in X\}$ zbioru X należą do jądra $\ker \mu$ miary niezwartości μ w przestrzeni Banacha l_∞.

Rozważmy nieskończony układ nieliniowych kwadratowych równań całkowych typu Volterry-Hammersteina, takiej postaci jak (5.1), tzn.

$$x_n(t) = a_n(t) + f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots) \int_0^t k_n(t,s) g_n(s, x_1(s), x_2(s), \dots)\, ds$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$ oraz dla $n = 1, 2, \dots$.

Sformułujemy teraz założenia pod jakimi będzie rozważany nieskończony układ (5.1).

(i) Ciag $(a_n(t))$ jest elementem przestrzeni BC_∞ takim, że $\lim\limits_{t\to\infty} a_n(t) = 0$ jednostajnie względem $n \in \mathbb{N}$ tzn. spełniony jest następujący warunek

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{T>0}\ \forall_{t\geqslant T}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ |a_n(t)| \leqslant \varepsilon.$$

Ponadto, $\lim_{n\to\infty} a_n(t) = 0$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}_+$.

Oznaczmy przez A normę elementu $(a_n(t))$ w przestrzeni BC_∞

$$A = \sup\big\{|a_n(t)| : t \in \mathbb{R}_+, n = 1, 2, \ldots\big\}. \tag{5.25}$$

(*ii*) Funkcje $k_n(t,s) = k_n : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ są ciągłe na zbiorze $\mathbb{R}_+^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Co więcej, funkcje $t \to k_n(t,s)$ są jednakowo ciągłe na zbiorze $\mathbb{R}_+$ jednostajnie względem $s \in \mathbb{R}_+$ tzn. zachodzi następujący warunek

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{s\in\mathbb{R}_+}{\forall}\ \underset{t_1,t_2\in\mathbb{R}_+}{\forall} \Big[|t_2 - t_1| \leqslant \delta \Rightarrow |k_n(t_2,s) - k_n(t_1,s)| \leqslant \varepsilon\Big].$$

(*iii*) Istnieje stała $K_1 > 0$ taka, że

$$\int_0^t |k_n(t,s)|ds \leqslant K_1$$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}_+$ oraz $n = 1, 2, \ldots$.

(*iv*) Ciąg $(k_n(t,s))$ jest ograniczony na $\mathbb{R}_+^2$ tzn. istnieje stała $K_2 > 0$ taka, że

$$|k_n(t,s)| \leqslant K_2$$

dla $t, s \in \mathbb{R}_+$ oraz $n = 1, 2, \ldots$.

(*v*) Funkcja f_n jest określona na zbiorze $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^\infty$ i przyjmuje wartości rzeczywiste dla $n = 1, 2, \ldots$. Ponadto, funkcja $t \to f_n(t, x_1, x_2, \ldots)$ jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}_+$ jednostajnie ze względu na $x = (x_n) \in l_\infty$ oraz jednostajnie względem $n \in \mathbb{N}$ tzn. spełniony jest następujący warunek

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{(x_i)\in l_\infty}{\forall}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{t,s\in\mathbb{R}_+}{\forall} \big[|t - s| \leqslant \delta$$

$$\Rightarrow |f_n(t, x_1, x_2, \ldots) - f_n(s, x_1, x_2, \ldots)| \leqslant \varepsilon\big].$$

(*vi*) Istnieje funkcja $l : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ taka, że l jest niemalejąca na $\mathbb{R}_+$, ciągła w 0 oraz istnieje ciąg funkcji $(\overline{f}_n)$ będących elementami przestrzeni BC_∞, przyjmujących nieujemne wartości oraz takich, że $\lim_{t\to\infty} \overline{f}_n(t) = 0$ jednostajnie względem $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{n\to\infty} \overline{f}_n(t) = 0$ dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$. Ponadto dla każdego $r > 0$ spełniona jest następująca nierówność

$$|f_n(t, x_1, x_2, \dots)| \leqslant \overline{f}_n(t) + l(r) \sup \left\{ |x_i| : i \geqslant n \right\}$$

dla każdego $x = (x_i) \in l_\infty$ takiego, że $\|x\|_{l_\infty} \leqslant r$, dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$ oraz dla $n = 1, 2, \dots$.

Zauważmy, że na podstawie założenia (vi) możemy określić stałą

$$\overline{F} = \sup \left\{ \overline{f}_n(t) : t \in \mathbb{R}_+, n = 1, 2, \dots \right\}.$$

Poniżej formułujemy pozostałe założenia pod jakimi będziemy rozważać układ (5.1).

(vii) Istnieje funkcja $m : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ taka, że m jest niemalejąca na $\mathbb{R}_+$, ciągła w 0, oraz spełniona jest następująca nierówność

$$|f_n(t, x_1, x_2, \dots) - f_n(t, y_1, y_2, \dots)| \leqslant m(r) \|x - y\|_{l_\infty}$$

dla każdego $r > 0$, oraz dla $x = (x_i)$, $y = (y_i) \in l_\infty$ takich, że $\|x\|_{l_\infty} \leqslant r$, $\|y\|_{l_\infty} \leqslant r$ i dla wszystkich $t \in \mathbb{R}_+$ oraz $n = 1, 2, \dots$.

$(viii)$ Funkcja g_n jest określona na zbiorze $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^\infty$ i przyjmuje wartości rzeczywiste dla $n = 1, 2, \dots$. Ponadto operator g określony na zbiorze $\mathbb{R}_+ \times l_\infty$ wzorem

$$(gx)(t) = (g_n(t, x)) = (g_1(t, x), g_2(t, x), \dots)$$

przekształca zbiór $\mathbb{R}_+ \times l_\infty$ w przestrzeń l_∞. Dodatkowo operator g jest taki, że rodzina funkcji $\left\{ (gx)(t) \right\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ jest jednakowo ciągła w przestrzeni l_∞ tzn. dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$\|(gy)(t) - (gx)(t)\|_{l_\infty} \leqslant \varepsilon$$

dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$ i wszystkich $x, y \in l_\infty$ takich, że $\|x - y\|_{l_\infty} \leqslant \delta$.

(ix) Operator g określony w założeniu $(viii)$ jest ograniczony na zbiorze $\mathbb{R}_+ \times l_\infty$. Dokładniej mówiąc, istnieje dodatnia stała $\overline{G}$ taka, że

$$\|(gx)(t)\|_{l_\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |g_n(t,x)| \leqslant \overline{G}$$

dla wszystkich $x \in l_\infty$ oraz $t \in \mathbb{R}_+$.

(x) Istnieje dodatnie rozwiązanie r_0 nierówności

$$A + \overline{F}\,\overline{G}K_1 + \overline{G}K_1 r\, l(r) \leqslant r$$

takie, że

$$\overline{G}K_1 \max\big\{l(r_0), m(r_0)\big\} < 1,$$

gdzie stałe A, $\overline{F}$, $\overline{G}$, K_1 zostały określone powyżej.

Przed sformułowaniem głównego rezultatu tego rozdziału wskażemy na kilka konsekwencji założenia (i).

Lemat 5.2.2. *Niech funkcja $x(t) = (x_n(t))$ będzie elementem przestrzeni BC_∞. Wtedy ciąg (x_n) jest ograniczony i lokalnie jednakowo ciągły na $\mathbb{R}_+$.*

Dowód. Zauważmy najpierw, że funkcja $x = x(t) = (x_n(t))$ jest funkcją ciągłą na przedziale $\mathbb{R}_+$ o wartościach z przestrzeni l_∞. Zatem dla każdego $T > 0$ funkcja $x(t)$ jest jednostajnie ciągła na przedziale $[0,T]$. Stąd wynika, że dla każdego, dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$, możemy znaleźć $\delta > 0$ taką, że z nierówności $|t_1 - t_2| \leqslant \delta$, dla $t_1, t_2 \in [0,T]$ wynika, że

$$\|x(t_2) - x(t_1)\|_{l_\infty} = \sup\big\{|x_n(t_2) - x_n(t_1)| : n = 1,2,\dots\big\} \leqslant \varepsilon.$$

Zatem nierówność $|x_n(t_2) - x_n(t_1)| \leqslant \varepsilon$ jest spełniona dla wszystkich $n = 1,2,\dots$.

Podsumowując wnioskujemy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnych $t_1, t_2 \in [0,T]$ takich, że $|t_2 - t_1| \leqslant \delta$, oraz dla wszystkich $n = 1,2,\dots$ zachodzi nierówność $|x_n(t_2) - x_n(t_1)| \leqslant \varepsilon$. To oznacza, że ciąg funkcji (x_n) jest jednakowo ciągły na przedziale $[0,T]$. Zatem ciąg (x_n) jest lokalnie jednakowo ciągły na $\mathbb{R}_+$.

W dalszej części dowodu zauważmy, że funkcja $x(t) \in BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$ jest ograniczona na $\mathbb{R}_+$. Oznacza to, że istnieje stała $M > 0$ taka, że $\|x(t)\|_{l_\infty} \leqslant M$ dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$. Stąd wynika, że $|x_n(t)| \leqslant M$ dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$. To pokazuje, że ciąg (x_n) jest ograniczony na przedziale $\mathbb{R}_+$. $\square$

Lemat 5.2.3. *Niech ciąg funkcji $(a_n(t))$ będzie elementem przestrzeni BC_∞ takim, że $\lim\limits_{t\to\infty} a_n(t) = 0$ jednostajnie względem $n \in \mathbb{N}$ (por. założenie (i)). Wtedy ciąg (a_n) jest ograniczony oraz jednakowo ciągły na $\mathbb{R}_+$.*

Dowód. Ograniczoność ciągu (a_n) na $\mathbb{R}_+$ wynika wprost z Lematu 5.2.2. W celu udowodnienia jednakowej ciągłości (a_n) na $\mathbb{R}_+$ ustalmy $\varepsilon > 0$. Uwzględniając założenie o jednostajnej granicy, możemy znaleźć liczbę $T > 0$ taką, że

$$|a_n(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

dla $t \geqslant T$ oraz $n = 1, 2, \ldots$. Z drugiej strony, uwzględniając Lemat 5.2.2 wnioskujemy, że ciąg (a_n) jest lokalnie jednakowo ciągły na $\mathbb{R}_+$. Zatem możemy określić liczbę $\delta > 0$ tak aby

$$|a_n(t_2) - a_n(t_1)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

dla $t_1, t_2 \in [0, T]$ takich, że $|t_2 - t_1| \leqslant \delta$ oraz dla wszystkich $n = 1, 2, \ldots$. Następnie ustalmy dowolne $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ takie, że $|t_2 - t_1| \leqslant \delta$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $t_1 < t_2$. Jeżeli $t_1, t_2 \in [0, T]$, wtedy w świetle powyżej ustalonego faktu mamy, że

$$|a_n(t_2) - a_n(t_1)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

dla $n = 1, 2, \ldots$.

Jeżeli $t_1, t_2 \geqslant T$, wtedy otrzymujemy

$$|a_n(t_2) - a_n(t_1)| \leqslant |a_n(t_2)| + |a_n(t_1)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

dla $n = 1, 2, \ldots$.

Załóżmy teraz, że $t_1 < T \leqslant t_2$. Wtedy ustalając dowolnie $n \in \mathbb{N}$ i biorąc pod uwagę powyżej pokazane zależności otrzymujemy

$$|a_n(t_2) - a_n(t_1)| \leqslant |a_n(t_2) - a_n(T)| + |a_n(T) - a_n(t_1)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

To pokazuje, że ciąg (a_n) jest jednakowo ciągły na $\mathbb{R}_+$. $\square$

W dalszej części zauważmy, że jako konsekwencję Lematu 5.2.2 otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 5.2.4. *Wartość A zdefiniowana równością* (5.25) *jest skończona.*

Sformułujemy teraz twierdzenie o istnieniu rozwiązania nieskończonego układu równań całkowych (5.1).

Twierdzenie 5.2.5. *Jeżeli spełnione są założenia* $(i)-(x)$*, to nieskończony układ równań całkowych* (5.1) *ma co najmniej jedno rozwiązanie* $x(t) = (x_n(t))$ *w przestrzeni* $BC_\infty = BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$.

Dowód. Na początku, analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 5.1.3, określmy trzy operatory F, V, Q na przestrzeni BC_∞ w następujący sposób:

$$\begin{aligned}(Fx)(t) =&((F_nx)(t)) = (f_n(t, x(t))) = (f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots)),\\(Vx)(t) =&((V_nx)(t)) = \Big(\int_0^t k_n(t, s)g_n(s, x_1(s), x_2(s), \dots)ds\Big),\\(Qx)(t) =&((Q_nx)(t)) = \big(a_n(t) + (F_nx)(t)(V_nx)(t)\big).\end{aligned}$$

Najpierw pokażemy, że operator F przekształca przestrzeń BC_∞ w siebie.
W tym celu ustalmy funkcję $x = x(t) = (x_n(t)) \in BC_\infty$. Wtedy w świetle założenia (vi) mamy następujące oszacowanie

$$\begin{aligned}|(F_nx)(t)| &= |f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots)|\\&\leqslant \overline{f}_n(t) + l\big(\|x(t)\|_{l_\infty}\big) \sup\big\{|x_i(t)| : i \geqslant n\big\}\end{aligned} \tag{5.26}$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$ oraz dla $n = 1, 2, \dots$, gdzie funkcje $\overline{f}_n$ oraz $l = l(r)$ zostały określone w założeniu (vi). Stąd na podstawie (5.26) wnioskujemy, że

$$\|Fx\|_{BC_\infty} \leqslant \overline{F} + l\big(\|x\|_{BC_\infty}\big)\|x\|_{BC_\infty} \tag{5.27}$$

dla każdego $x \in BC_\infty$. To pokazuje, że funkcja Fx jest ograniczona na $\mathbb{R}_+$.

W celu udowodnienia ciągłości funkcji Fx na przedziale $\mathbb{R}_+$, ustalmy dowolnie $\varepsilon > 0$. Wtedy z założenia (v) otrzymujemy, że istnieje $\delta > 0$ taka, że dla $t, s \in \mathbb{R}_+$ oraz $|t - s| \leqslant \delta$ spełniona jest następująca nierówność

$$|f_n(t, x_1, x_2, \dots) - f_n(s, x_1, x_2, \dots)| \leqslant \varepsilon$$

dla każdego $x = (x_i) \in l_\infty$. To implikuje, że

$$\|(Fx)(t) - (Fx)(s)\|_{l_\infty} \leqslant \varepsilon$$

dla $t, s \in \mathbb{R}_+$ takich, że $|t - s| \leqslant \delta$. To oznacza, że funkcja Fx jest ciągła (nawet jednostajnie ciągła) na $\mathbb{R}_+$. Ostatecznie otrzymujemy, że operator F przekształca przestrzeń BC_∞ w siebie.

Przejdźmy teraz do pokazania, że operator V działa z przestrzeni BC_∞ w siebie. Zatem, podobnie jak powyżej, ustalmy funkcję $x = x(t) = (x_n(t)) \in BC_\infty$. Wtedy, dla dowolnie wybranych liczb $t \in \mathbb{R}_+$ oraz $n \in \mathbb{N}$, w świetle założeń (iii) oraz (ix), mamy

$$\begin{aligned} |(V_n x)(t)| &\leqslant \int_0^t |k_n(t,s)||g_n(s, x_1(s), x_2(s), \dots)|ds \\ &\leqslant \int_0^t |k_n(t,s)|\overline{G}\, ds \leqslant \overline{G} \int_0^t |k_n(t,s)|ds \leqslant \overline{G}K_1. \end{aligned} \tag{5.28}$$

W szczególności powyższe oszacowanie pokazuje, że funkcja Vx jest ograniczona na przedziale $\mathbb{R}_+$.

Następnie ustalmy $\varepsilon > 0$ oraz wybierzmy liczbę $\delta > 0$ według założenia (ii). Wtedy, dla dowolnie ustalonych liczb $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ takich, że $|t_2 - t_1| \leqslant \delta$, na podstawie założeń (ii) oraz (ix) (zakładając dodatkowo, że $t_1 < t_2$), otrzymujemy

$$\begin{aligned} &|(V_n x)(t_2) - (V_n x)(t_1)| \\ &\leqslant \left| \int_0^{t_2} k_n(t_2, s) g_n(s, x_1(s), x_2(s), \dots)ds - \int_0^{t_2} k_n(t_1, s) g_n(s, x_1(s), x_2(s), \dots)ds \right| \\ &\quad + \left| \int_0^{t_2} k_n(t_1, s) g_n(s, x_1(s), x_2(s), \dots)ds - \int_0^{t_1} k_n(t_1, s) g_n(s, x_1(s), x_2(s), \dots)ds \right| \\ &\leqslant \int_0^{t_2} |k_n(t_2, s) - k_n(t_1, s)||g_n(s, x_1(s), x_2(s), \dots)|ds \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} |k_n(t_1, s)||g_n(s, x_1(s), x_2(s), \dots)|ds \end{aligned}$$

$$\leqslant \int_0^{t_2} \omega_k(\delta)|g_n(s,x_1(s),x_2(s),\dots)|ds + \int_{t_1}^{t_2} K_2|g_n(s,x_1(s),x_2(s),\dots)|ds, \qquad (5.29)$$

gdzie K_2 jest stałą występującą w założeniu (iv). Z kolei $\omega_k(\delta)$ oznacza zwykły moduł ciągłości ciągu funkcji $t \to k_n(t,s)$ na przedziale $\mathbb{R}_+$ (zgodnie z założeniem (ii)). Oczywiście mamy, że $\omega_k(\delta) \to 0$ dla $\delta \to 0$.

Biorąc pod uwagę oszacowanie (5.29) oraz założenie (ix), otrzymujemy

$$|(V_n x)(t_2) - (V_n x)(t_1)| \leqslant \overline{G}\,\omega_k(\delta) + K_2\,\overline{G}\,\delta. \qquad (5.30)$$

Zatem otrzymujemy, że funkcja Vx jest ciągła na przedziale $\mathbb{R}_+$. Łącząc ograniczoność funkcji Vx z jej ciągłością na $\mathbb{R}_+$ wnioskujemy, że operator V przekształca przestrzeń BC_∞ w siebie.

Biorąc pod uwagę fakt, że przestrzeń $BC_\infty = BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$ tworzy algebrę Banacha ze względu na mnożenie po współrzędnych ciągów funkcyjnych, oraz uwzględniając definicję operatora Q, a także założenie (i) stwierdzamy, że dla dowolnie ustalonej funkcji $x = x(t) \in BC_\infty$ funkcja $(Qx)(t) = ((Q_n x)(t)) = \big(a_n(t) + (F_n x)(t)(V_n x)(t)\big)$ działa z przedziału $\mathbb{R}_+$ w przestrzeń l_∞. Faktycznie, w świetle faktu, że $((F_n x)(t)) \in l_\infty$ dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$ oraz oszacowania (5.28) mamy

$$|(Q_n x)(t)| \leqslant |a_n(t)| + \overline{G}\,K_1|(F_n x)(t)|.$$

Stąd stosując (5.26) otrzymujemy, że $(Qx)(t) = ((Q_n x)(t)) \in l_\infty$ dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$.

Zauważmy następnie, że ciągłość funkcji Qx na $\mathbb{R}_+$ jest konsekwencją tego, że obie funkcje Fx oraz Vx są ciągłe na $\mathbb{R}_+$. Podobnie możemy stwierdzić, że funkcja Qx jest ograniczona na przedziale $\mathbb{R}_+$. Wystarczy wykorzystać założenie (i) oraz Lemat 5.2.2.

Ostatecznie zauważmy, że łącząc wszystkie powyżej wskazane własności funkcji Qx, otrzymujemy, że operator Q przekształca przestrzeń BC_∞ w siebie.

Dalej, na podstawie nierówności (5.27) oraz (5.28), dla dowolnie ustalonych

$n \in \mathbb{N}$ oraz $t \in \mathbb{R}_+$ mamy

$$\begin{aligned}
|(Q_n x)(t)| &\leqslant |a_n(t)| + |(F_n x)(t)||(V_n x)(t)| \\
&\leqslant A + \Big[\overline{F} + l(\|x\|_{BC_\infty})\|x\|_{BC_\infty}\Big]\overline{G}K_1 \\
&\leqslant A + \overline{F}\,\overline{G}K_1 + \overline{G}\,K_1\, l(\|x\|_{BC_\infty})\|x\|_{BC_\infty}.
\end{aligned}$$

Z powyższego oszacowania i założenia (x) wynika, że istnieje liczba $r_0 > 0$ taka, że operator Q przekształca kulę $\overline{B}_{r_0}$ w siebie.

Pokażemy teraz, że operator Q jest ciągły na kuli $\overline{B}_{r_0}$. Biorąc pod uwagę postać operatora Q, występującą na początku tego dowodu widzimy, że wystarczy udowodnić ciągłość operatorów F oraz V osobno.

W tym celu ustalmy dowolnie $\varepsilon > 0$ oraz $x \in \overline{B}_{r_0}$. Następnie wybierzmy dowolny punkt $y \in \overline{B}_{r_0}$ taki, że $\|x - y\|_{BC_\infty} \leqslant \varepsilon$. Wtedy dla każdego ustalonego $t \in \mathbb{R}_+$, na mocy założenia (vii) mamy

$$\|(Fy)(t) - (Fx)(t)\|_{l_\infty} \leqslant m(r_0)\|x - y\|_{l_\infty} \leqslant \varepsilon\, m(r_0).$$

W szczególności pokazuje to, że operator F jest ciągły w każdym punkcie kuli $\overline{B}_{r_0}$.

W calu udowodnienia ciągłości operatora V na kuli $\overline{B}_{r_0}$ określmy funkcję $\delta = \delta(\varepsilon)$ w poniższy sposób

$$\delta(\varepsilon) = \sup\Big\{|g_n(t,y) - g_n(t,x)| : x, y \in l_\infty, \|y - x\|_{l_\infty} \leqslant \varepsilon,\ t \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Oczywiście z założenia $(viii)$ wynika, że $\delta(\varepsilon) \to 0$ dla $\varepsilon \to 0$. Następnie biorąc $x, y \in \overline{B}_{r_0}$ takie, że $\|y - x\|_{BC_\infty} \leqslant \varepsilon$ oraz $t \in \mathbb{R}_+$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&|(V_n y)(t) - (V_n x)(t)| \\
&\quad\leqslant \int_0^t |k_n(t,s)||g_n(s, y_1(s), y_2(s), \dots) - g_n(s, x_1(s), x_2(s), \dots)|ds \\
&\quad\leqslant \int_0^t |k_n(t,s)|\delta(\varepsilon)ds \leqslant K_1\delta(\varepsilon).
\end{aligned}$$

To prowadzi do oszacowania

$$\|Vx - Vy\|_{BC_\infty} \leqslant K_1\,\delta(\varepsilon).$$

Zatem, operator V jest ciągły na kuli $\overline{B}_{r_0}$.
Ostatecznie wykazaliśmy, że operator Q jest ciągły na kuli $\overline{B}_{r_0}$.

W dalszym ciągu rozważymy pierwszy ze składników miary μ_a^1, to znaczy wielkość ω_0^∞ wyrażoną wzorem (4.26). Ustalmy dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$. Następnie wybierzmy wartość $\delta > 0$ zgodnie z założeniem (v). Wybierzmy niepusty podzbiór X kuli $\overline{B}_{r_0}$, oraz weźmy dowolną funkcję $x \in X$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Wtedy dla dowolnych $t, s \in \mathbb{R}_+$ takich, że $|t - s| \leqslant \delta$, uwzględniając założenia (v) oraz (vii) mamy

$$\begin{aligned}
|(F_n x)(t) - (F_n x)(s)| &= |f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots) - f_n(s, x_1(s), x_2(s), \dots)| \\
&\leqslant |f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots) - f_n(s, x_1(t), x_2(t), \dots)| \\
&+ |f_n(s, x_1(t), x_2(t), \dots) - f_n(s, x_1(s), x_2(s), \dots)| \\
&\leqslant \varepsilon + m(r_0) \sup \left\{ \|x(t) - x(s)\|_{l_\infty} : t, s \in \mathbb{R}_+, |t - s| \leqslant \delta \right\} \\
&\leqslant \varepsilon + m(r_0)\, \omega^\infty(x, \delta).
\end{aligned}$$

Następnie na podstawie powyższego oszacowania otrzymujemy

$$\omega^\infty(Fx, \varepsilon) \leqslant \varepsilon + m(r_0)\, \omega^\infty(x, \delta). \tag{5.31}$$

Ustalmy następnie liczbę $\varepsilon > 0$ i wybierzmy $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ tak, aby $|t_2 - t_1| \leqslant \varepsilon$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $t_1 < t_2$. Wtedy w świetle oszacowania (5.30) otrzymujemy następującą nierówność

$$|(V_n x)(t_2) - (V_n x)(t_1)| \leqslant \overline{G}\, \omega_k(\varepsilon) + \overline{G}\, K_2\, \varepsilon.$$

To prowadzi do oszacowania

$$\omega^\infty(Vx, \varepsilon) \leqslant \overline{G}\, \omega_k(\varepsilon) + \overline{G}\, K_2\, \varepsilon. \tag{5.32}$$

Teraz biorąc pod uwagę reprezentację operatora Q, dla dowolnej funkcji $x \in X$ oraz dowolnych liczb $t, s \in \mathbb{R}_+$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\|(Qx)(t) - (Qx)(s)\|_{l_\infty} &\leqslant \|a(t) - a(s)\|_{l_\infty} \\
&+ \|(Vx)(t)\|_{l_\infty} \|(Fx)(t) - (Fx)(s)\|_{l_\infty} + \|(Fx)(s)\|_{l_\infty} \|(Vx)(t) - (Vx)(s)\|_{l_\infty},
\end{aligned}$$

gdzie $a(t) = (a_n(t))$.
Następnie ustalmy $\varepsilon > 0$ i załóżmy, że $|t - s| \leqslant \varepsilon$. Wtedy z powyższej nierówności i oszacowań (5.31), (5.32), (5.27), oraz (5.28), mamy

$$\begin{aligned}\omega^{\infty}(Qx, \varepsilon) \leqslant{}& \omega^{\infty}(a, \varepsilon) + \overline{G}\, K_1\, (\varepsilon + m(r_0)\, \omega^{\infty}(x, \varepsilon)) \\ &+ \big(\overline{F} + r_0\, l(r_0)\big)\big(\overline{G}\, \omega_k(\varepsilon) + \overline{G}\, K_2\, \varepsilon\big).\end{aligned}$$

Teraz uwzględniając Lemat 5.2.3 wnioskujemy, że $\omega^{\infty}(a, \varepsilon) \to 0$ dla $\varepsilon \to 0$. Następnie mając na uwadze, że $\omega_k(\varepsilon) \to 0$ dla $\varepsilon \to 0$, z powyższego oszacowania wyprowadzamy następującą nierówność

$$\omega^{\infty}(QX) \leqslant \overline{G}\, K_1\, m(r_0)\, \omega_0^{\infty}(X). \tag{5.33}$$

Rozważymy następnie drugi składnik miary niezwartości μ_a^1 (por. wzór (5.24)) oznaczony przez $\overline{\mu}_{\infty}^1$ i określony wzorem (4.27).
W tym celu ustalmy niepusty podzbiór X kuli $\overline{B}_{r_0}$ i wybierzmy dowolną funkcję $x = x(t) \in X$. Dalej, weźmy liczbę naturalną n oraz $T > 0$. Wtedy dla ustalonego $t \in [0, T]$, uwzględniając postać operatora Q i oszacowania (5.26) oraz (5.28), otrzymujemy

$$\begin{aligned}|(Q_n x)(t)| &\leqslant |a_n(t)| + |f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots)| \int_0^t |k_n(t,s)||g_n(s, x_1(s), x_2(s), \dots)| ds \\ &\leqslant |a_n(t)| + \Big[\overline{f}_n(t) + l\big(\|x(t)\|_{l_\infty}\big) \sup\big\{|x_i(t)| : i \geqslant n\big\}\Big] \overline{G}\, K_1.\end{aligned}$$

Następnie biorąc supremum po wszystkich $x \in X$, z powyższego oszacowania otrzymujemy

$$\sup_{x \in X} |(Q_n x)(t)| \leqslant |a_n(t)| + \overline{G} K_1 \left[\overline{f}_n(t) + l(r_0) \sup_{x \in X} \Big\{ \sup\big\{|x_i(t)| : i \geqslant n\big\}\Big\}\right].$$

Stąd, biorąc pod uwagę założenia (i) oraz (vi), wyprowadzamy następującą nierówność

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \sup_{x \in X} |(Q_n x)(t)| \right\} \leqslant \overline{G} K_1 l(r_0) \left\{ \lim_{n \to \infty} \left\{ \sup_{x \in X} \Big\{ \sup\big\{|x_i(t)| : i \geqslant n\big\}\Big\}\right\}\right\}.$$

Ostatecznie biorąc supremum po $t \in [0,T]$, po obu stronach powyższej nierówności, a następnie dla $T \to \infty$, na podstawie wzoru (4.27) dostajemy

$$\overline{\mu}^1_\infty(QX) \leqslant \overline{G}\, K_1\, l(r_0)\, \overline{\mu}^1_\infty(X). \tag{5.34}$$

W celu oszacowania ostatniego składnika a_∞ miary niezwartości μ^1_a (por. wzór (5.24)) wyrażonego wzorem (4.30), ustalmy niepusty podzbiór X ($X \subset \overline{B}_{r_0}$) i wybierzmy funkcję $x \in X$. Następnie wybierzmy dowolnie $T > 0$. Wtedy biorąc $t \geqslant T$ i uwzględniając otrzymane wcześniej nierówności (5.26) oraz (5.28), mamy

$$\begin{aligned}
&\sup\Big\{|(Q_n x)(t)| : n \in \mathbb{N}\Big\} \leqslant \sup\Big\{|a_n(t)| : n \in \mathbb{N}\Big\} \\
&\quad + \sup\left\{ |f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots)| \int_0^t |k_n(t,s)||g_n(s, x_1(s), x_2(s), \dots)| ds : n \in \mathbb{N} \right\} \\
&\leqslant \sup\Big\{|a_n(t)| : n \in \mathbb{N}\Big\} + \sup\Big[\overline{f}_n(t) + l(r_0) \sup\Big\{|x_i(t)| : i \geqslant n\Big\} : n \in \mathbb{N}\Big]\overline{G}\, K_1 \\
&\leqslant \sup\Big\{|a_n(t)| : n \in \mathbb{N}\Big\} + l(r_0)\, \overline{G}\, K_1 \sup\Big[\sup\Big\{|x_i(t)| : i \geqslant n\Big\} : n \in \mathbb{N}\Big] \\
&\quad + \overline{G}\, K_1 \sup\Big\{\overline{f}_n(t) : n \in \mathbb{N}\Big\}.
\end{aligned}$$

Dalej, biorąc w powyższym oszacowaniu supremum po $t \geqslant T$ a następnie po $x \in X$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\sup_{x \in X}\left\{ \sup_{t \geqslant T} \left\{ \sup\Big\{|(Q_n x)(t)| : n \in \mathbb{N}\Big\}\right\}\right\} \\
&\quad \leqslant \sup_{t \geqslant T}\left\{ \sup\Big\{|a_n(t)| : n \in \mathbb{N}\Big\}\right\} \\
&\qquad + l(r_0)\, \overline{G}\, K_1 \left\{ \sup_{x \in X}\left\{ \sup_{t \geqslant T}\left\{ \sup\Big\{|x_n(t)| : n \in \mathbb{N}\Big\}\right\}\right\}\right\} \\
&\qquad + \overline{G}\, K_1 \left\{ \sup_{t \geqslant T}\left\{ \sup\Big\{\overline{f}_n(t) : n \in \mathbb{N}\Big\}\right\}\right\}.
\end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę założenia (i) oraz (vi) dla $T \to \infty$, otrzymujemy następującą nierówność

$$a_\infty(QX) \leqslant l(r_0)\, \overline{G}\, K_1\, a_\infty(X). \tag{5.35}$$

Ostatecznie łącząc oszacowania (5.33)-(5.35) oraz uwzględniając wzór (5.24), dla dowolnego niepustego podzbioru X kuli $\overline{B}_{r_0}$ dostajemy nierówność

$$\begin{aligned}\mu_a^1(QX) &\leqslant \overline{G}\, K_1\, m(r_0)\, \omega_0^\infty(X) + \overline{G}\, K_1\, l(r_0)\, \overline{\mu}_\infty^1(X) + l(r_0)\, \overline{G}\, K_1\, a_\infty(X)\\ &\leqslant \overline{G} K_1 \max\left\{l(r_0), m(r_0)\right\} \mu_a^1(X).\end{aligned}$$

Zatem, biorąc pod uwagę fakt, że operator Q jest ciągły, oraz przekształca kulę $\overline{B}_{r_0}$ w siebie, a także uwzględniając założenie (x) oraz Twierdzenie 1.1 wnioskujemy, że nieskończony układ równań całkowych typu Volterry-Hammersteina (5.1) ma co najmniej jedno rozwiązanie $x = x(t)$ w przestrzeni $BC_\infty = BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$, które zawarte jest w kuli $\overline{B}_{r_0}$ i jest jednostajnie ciągłe na przedziale $\mathbb{R}_+$.
Koniec dowodu. □

Pokażemy teraz przykład ilustrujący rezultat o istnieniu rozwiązania nieskończonego układu równań całkowych, uzyskany w Twierdzeniu 5.2.5.

Przykład 5.2.6. Rozważmy następujący nieskończony układ nieliniowych równań całkowych typu Volterry-Hammersteina postaci

$$\begin{aligned}x_n(t) = \frac{\alpha t}{1+n^2+t^2} &+ \left(\frac{\beta}{n^2+t^2} + \frac{\gamma x_n(t)}{1+x_1^2(t)}\right.\\ &\left. + \frac{\gamma x_{n+1}(t)}{n+x_2^2(t)}\right) \int_0^t \frac{s}{1+n(s^2+t^2)} \operatorname{arctg}\left(\frac{x_1(s)+x_n(s)}{n+s^2}\right) ds, \qquad (5.36)\end{aligned}$$

dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz $t \in \mathbb{R}_+$. Zakładamy ponadto, że liczby α, β, γ występujące w powyższym układzie są dodatnimi stałymi.
Zauważmy, że nieskończony układ (5.36) jest szczególnym przypadkiem układu (5.1) dla

$$a_n(t) = \frac{\alpha t}{1+n^2+t^2}, \qquad (5.37)$$

$$f_n(t, x_1, x_2, \ldots) = \frac{\beta}{n^2+t^2} + \frac{\gamma x_n}{1+x_1^2} + \frac{\gamma x_{n+1}}{n+x_2^2}, \qquad (5.38)$$

$$k_n(t, s) = \frac{s}{1+n(s^2+t^2)}, \qquad (5.39)$$

$$g_n(t, x_1, x_2, \ldots) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x_1+x_n}{n+t^2}\right) \qquad (5.40)$$

dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz $t, s \in \mathbb{R}_+$.

Pokażemy, że nieskończony układ równań całkowych (5.36) ma rozwiązanie w przestrzeni Banacha $BC_\infty = BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$. W tym celu zastosujemy Twierdzenie 5.2.5. Pokażemy zatem, że funkcje określone wzorami (5.37)-(5.40) spełniają założenia (i)-(x) Twierdzenia 5.2.5.

Zauważmy najpierw, że funkcja $a_n(t)$ określona wzorem (5.37) jest elementem przestrzeni BC_∞ dla $n = 1, 2, \ldots$. Uwzględniając nierówność

$$|a_n(t)| = a_n(t) \leqslant \frac{\alpha t}{1 + t^2}$$

stwierdzamy, że $\lim\limits_{t\to\infty} a_n(t) = 0$ jednostajnie względem $n \in \mathbb{N}$. Ponadto, zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(t) = 0$ dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$. To pokazuje, że ciąg $(a_n(t))$ spełnia założenie (i). Po wykonaniu rachunków otrzymujemy, że

$$A = \frac{\alpha\sqrt{2}}{4},$$

gdzie stała A jest definiowana wzorem (5.25). (Jest to nie tylko supremum ale nawet maksimum dla $n = 1$, $t = \sqrt{2}$.)

Zaobserwujmy dalej, że funkcja $k_n(t, s)$ określona wzorem (5.39) ($n = 1, 2, \ldots$) jest ciągła na $\mathbb{R}_+^2$. Dodatkowo, używając standardowych narzędzi rachunku różniczkowego widzimy, że

$$|k_n(t_2, s) - k_n(t_1, s)| \leqslant \frac{1}{n}|t_2 - t_1|$$

dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz dla $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$. To oznacza, że ciąg funkcji $(k_n(\cdot, s))$ jest jednakowo ciągły na $\mathbb{R}_+$ jednostajnie względem $s \in \mathbb{R}_+$.
Podsumowując stwierdzamy, że założenie (ii) jest spełnione.

Zauważmy następnie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz dla dowolnych $t, s \in \mathbb{R}_+$ mamy następujące oszacowanie

$$|k_n(t, s)| \leqslant \frac{s}{1 + ns^2} \leqslant \frac{s}{1 + s^2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Zatem ciąg $(k_n(t, s))$ jest ograniczony na $\mathbb{R}_+$ ze stałą

$$K_2 = \frac{1}{2}.$$

To pokazuje, że założenie (iv) jest spełnione.

Z drugiej strony otrzymujemy

$$\int_0^t |k_n(t,s)|ds = \int_0^t \frac{s}{1+n(s^2+t^2)}ds = \frac{1}{2n}\ln\left(\frac{1+2nt^2}{1+nt^2}\right) \leqslant \frac{1}{2n}\ln 2 \leqslant \frac{1}{2}\ln 2.$$

Powyższa nierówność pokazuje, że ciąg funkcji $(k_n(t,s))$ spełnia założenie (iii) ze stałą

$$K_1 = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Weźmy teraz pod uwagę funkcję $t \to f_n(t, x_1, x_2, \dots)$ określoną wzorem (5.38) dla $n = 1, 2, \dots$. Ustalmy dowolnie $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$, $x = (x_n) \in l_\infty$. Mamy wtedy, że

$$\begin{aligned}
&|f_n(t_2, x_1, x_2, \dots) - f_n(t_1, x_1, x_2, \dots)| \\
&= \left|\left(\frac{\beta}{n^2+t_2^2} + \frac{\gamma x_n}{1+x_1^2} + \frac{\gamma x_{n+1}}{n+x_2^2}\right) - \left(\frac{\beta}{n^2+t_1^2} + \frac{\gamma x_n}{1+x_1^2} + \frac{\gamma x_{n+1}}{n+x_2^2}\right)\right| \\
&\leqslant \beta\left|\frac{1}{n^2+t_2^2} - \frac{1}{n^2+t_1^2}\right| \leqslant \beta\,\frac{|t_2-t_1|(t_1+t_2)}{(n^2+t_1^2)(n^2+t_2^2)} \\
&= \beta|t_2-t_1|\left[\frac{t_1}{(n^2+t_1^2)(n^2+t_2^2)} + \frac{t_2}{(n^2+t_1^2)(n^2+t_2^2)}\right] \\
&\leqslant \beta|t_2-t_1|\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2+t_2^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2+t_1^2}\right] \leqslant \beta|t_2-t_1|
\end{aligned}$$

dla każdego $n = 1, 2, \dots$. To pokazuje, że funkcje f_n $(n = 1, 2, \dots)$ spełniają założenie (v).

W celu zweryfikowania założenia (vi) ustalmy liczbę $r > 0$ i wybierzmy $x = (x_i) \in l_\infty$ takie, że $\|x\|_{l_\infty} \leqslant r$. Wtedy, dla dowolnie ustalonych $n \in \mathbb{N}$ oraz $t \in \mathbb{R}_+$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
|f_n(t, x_1, x_2, \dots)| &\leqslant \frac{\beta}{n^2+t^2} + \gamma\left[\frac{|x_n|}{1+x_1^2} + \frac{|x_{n+1}|}{n+x_2^2}\right] \\
&\leqslant \frac{\beta}{n^2+t^2} + \gamma\big(|x_n| + |x_{n+1}|\big) \leqslant \frac{\beta}{n^2+t^2} + 2\,\gamma \sup\big\{|x_i| : i \geqslant n\big\}.
\end{aligned}$$

To pokazuje, że nierówność z założenia (vi) jest spełniona z następującymi funkcjami

$$\overline{f}_n(t) = \frac{\beta}{n^2+t^2},$$

$$l(r) = 2\gamma$$

dla $n = 1, 2, \dots$. Ponieważ

$$\overline{f}_n(t) \leqslant \frac{\beta}{(1+t^2)}$$

stwierdzamy, że $\lim_{t\to\infty} \overline{f}_n(t) = 0$ jednostajnie względem $n \in \mathbb{N}$. Ponadto mamy, że $\lim_{n\to\infty} \overline{f}_n(t) = 0$ dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$.
Podsumowując, założenie (vi) jest spełnione. Ponadto zauważmy, że

$$\overline{F} = \sup\{\overline{f}_n(t) : t \in \mathbb{R}_+, n = 1, 2, \dots\} = \beta.$$

Następnie ustalmy liczbę $r > 0$ i weźmy dowolne $x = (x_i), y = (y_i) \in l_\infty$ takie, że $\|x\|_{l_\infty} \leqslant r$, $\|y\|_{l_\infty} \leqslant r$. Wtedy dla ustalonych $n \in \mathbb{N}$ oraz $t \in \mathbb{R}_+$, mamy

$$\begin{aligned}
|f_n(t,&x_1, x_2, \dots) - f_n(t, y_1, y_2, \dots)| \leqslant \gamma \left| \frac{x_n}{1+x_1^2} - \frac{y_n}{1+y_1^2} \right| + \gamma \left| \frac{x_{n+1}}{n+x_2^2} - \frac{y_{n+1}}{n+y_2^2} \right| \\
&\leqslant \gamma \, \frac{|x_n + x_n y_1^2 - y_n - y_n x_1^2|}{(1+x_1^2)(1+y_1^2)} + \gamma \, \frac{|n x_{n+1} + x_{n+1} y_2^2 - n y_{n+1} - x_2^2 y_{n+1}|}{(n+x_2^2)(n+y_2^2)} \\
&\leqslant \gamma \, |x_n - y_n| + \gamma \, \frac{|(x_n y_1^2 - y_n y_1^2) + (y_n y_1^2 - y_n x_1^2)|}{(1+x_1^2)(1+y_1^2)} \\
&\quad + \gamma \, n \, \frac{|x_{n+1} - y_{n+1}|}{(n+x_2^2)(n+y_2^2)} + \gamma \, \frac{|(x_{n+1} y_2^2 - y_{n+1} y_2^2) + (y_{n+1} y_2^2 - y_{n+1} x_2^2)|}{(n+x_2^2)(n+y_2^2)} \\
&\leqslant \gamma |x_n - y_n| + \gamma \frac{y_1^2 |x_n - y_n|}{(1+x_1^2)(1+y_1^2)} + \gamma |y_n| \frac{(|x_1| + |y_1|)|x_1 - y_1|}{(1+x_1^2)(1+y_1^2)} \\
&\quad + \gamma |x_{n+1} - y_{n+1}| + \gamma \frac{y_2^2 |x_{n+1} - y_{n+1}|}{(n+x_2^2)(n+y_2^2)} + \gamma |y_{n+1}| \frac{(|x_2| + |y_2|)|x_2 - y_2|}{(n+x_2^2)(n+y_2^2)} \\
&\leqslant 2\gamma |x_n - y_n| + \gamma \, r \left(\frac{|x_1|}{(1+x_1^2)(1+y_1^2)} + \frac{|y_1|}{(1+x_1^2)(1+y_1^2)} \right) |x_1 - y_1| \\
&\quad + 2\gamma |x_{n+1} - y_{n+1}| + \gamma \, r \left(\frac{|x_2|}{(n+x_2^2)(n+y_2^2)} + \frac{|y_2|}{(n+x_2^2)(n+y_2^2)} \right) |x_2 - y_2| \\
&\leqslant 2\gamma |x_n - y_n| + \gamma \, r |x_1 - y_1| + 2\gamma |x_{n+1} - y_{n+1}| + \gamma \, r |x_2 - y_2| \\
&\leqslant (4\gamma + 2\gamma r) \|x - y\|_{l_\infty} = 2\gamma(2 + r) \|x - y\|_{l_\infty}.
\end{aligned}$$

Widzimy zatem, że założenie (vii) jest spełnione z funkcją

$$m(r) = 2\gamma(2 + r).$$

W następnej części zweryfikujemy założenie $(viii)$. W tym celu ustalmy dowolnie $n \in \mathbb{N}$ i rozważmy funkcję $g_n(t, x) = g_n(t, x_1, x_2, \dots)$ określoną wzorem

(5.40) tzn.

$$g_n(t, x_1, x_2, \dots) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x_1 + x_n}{n + t^2}\right).$$

Wtedy z oszacowania

$$|g_n(t, x_1, x_2, \dots)| \leqslant \frac{|x_1| + |x_n|}{n + t^2} \leqslant \frac{|x_1| + |x_n|}{n}$$

wnioskujemy, że operator g określony w założeniu $(viii)$ równością

$$(gx)(t) = (g_n(t, x)) = (g_1(t, x), g_2(t, x), \dots)$$

przekształca zbiór $\mathbb{R}_+ \times l_\infty$ w l_∞.
W dalszym ciągu ustalmy $t \in \mathbb{R}_+$ i weźmy $x = (x_i), y = (y_i) \in l_\infty$. Mamy wtedy

$$\begin{aligned} |g_n(t, x) - g_n(t, y)| &\leqslant \left| \frac{x_1 + x_n}{n + t^2} - \frac{y_1 + y_n}{n + t^2} \right| \\ &\leqslant \frac{|x_1 - y_1|}{n + t^2} + \frac{|x_n - y_n|}{n + t^2} \leqslant \frac{|x_1 - y_1|}{n} + \frac{|x_n - y_n|}{n}. \end{aligned}$$

To pozwala nam wyprowadzić następujące oszacowanie

$$\begin{aligned} \|(gx)(t) - (gy)(t)\|_{l_\infty} &= \sup\left\{|g_n(t, x) - g_n(t, y)| : n \in \mathbb{N}\right\} \\ &\leqslant \sup\left\{\frac{|x_1 - y_1|}{n} + \frac{|x_n - y_n|}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \\ &\leqslant 2\sup\left\{\frac{|x_n - y_n|}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \leqslant 2\|x - y\|_{l_\infty}. \end{aligned}$$

Z powyższej nierówności wynika, że operator g spełnia założenie $(viii)$.
Ponadto dla dowolnych $x \in l_\infty$ oraz $t \in \mathbb{R}_+$ mamy

$$\|(gx)(t)\|_{l_\infty} = \sup\left\{|g_n(t, x)| : n \in \mathbb{N}\right\} \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Oznacza to, że operator g spełnia założenie (ix) ze stałą

$$\overline{G} = \frac{\pi}{2}.$$

W końcu rozważmy pierwszą nierówność z założenia (x). W tym wypadku przyjmuje ona postać

$$\frac{\alpha}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\ln 2\,(\beta + 2\gamma r) \leqslant r. \tag{5.41}$$

Z drugiej strony druga nierówność rozważanego założenia (x) przyjmuje postać

$$\gamma \frac{\pi}{2} \ln 2 \, (2 + r_0) < 1. \tag{5.42}$$

Wybierając na przykład $\gamma < \frac{1}{\pi \ln 2}$ oraz $r_0 > \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\beta}{2\gamma}$ widzimy, że obydwie nierówności, (5.41) oraz (5.42), są spełnione.

Zatem na podstawie Twierdzenia 5.2.5 stwierdzamy, że nieskończony układ nieliniowych równań całkowych (5.36) ma co najmniej jedno rozwiązanie należące do kuli $\overline{B}_{r_0}$ w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$.

Literatura

[1] E. Ablet, L. Cheng, Q. Cheng, W. Zhang, Every Banach space admits a homogeneous measure of noncompactness not equivalent to the Hausdorff measure, *Science China Math.*, 62 (2019) 147-156.

[2] R.R. Akhmerov, M.I. Kamenskii, A.S. Potapov, A.E. Rodkina, B.N. Sadovskii, *Measure of Noncompactness and Condensing Operators*, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 55, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.

[3] J. Appell, J. Banaś, N. Merentes, Measures of noncompactness in the study of asymptotically stable and ultimately nondecreasing solutions of integral equations, *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendunge = Journal of Analysis and its Applications*, 29 (2010) 251-273.

[4] J.M. Ayerbe Toledano, T. Dominguez Benavides, G. Lopez Acedo, *Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.

[5] J. Banaś, A. Chlebowicz, On solutions of an infinite system of nonlinear integral equations on the real half-axis, *Banach Journal of Mathematical Analysis*, 13,4 (2019) 944-968.

[6] J. Banaś, A. Chlebowicz, W. Woś, On measures of noncompactness in the space of functions defined on the half-axis with values in a Banach space, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 489,2 (2020) ID 124187.

[7] J. Banaś, K. Goebel, *Measures of Noncompactness in Banach Spaces*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 60, Marcel Dekker, Inc., New York, 1980.

[8] J. Banaś, B. Krichen, B. Mefteh, Fixed point theorems in WC-Banach algebras and their applications to infinite systems of integral equations, *Filomat* (w druku).

[9] J. Banaś, M. Lecko, An existence theorem for a class of infinite system of integral equations, *Mathematical and Computer Modelling*, 34 (2001) 533-539.

[10] J. Banaś, N. Merentes, B. Rzepka, *Measures of noncompactness in the space of continuous and bounded functions defined on the real half-axis*, w: Advances in Nonlinear Analysis via the Concept of Measure of Noncompactness, red. J. Banaś, M. Jleli, M. Musaleen, B. Samet, C. Vetro, Springer, Singapore, 2017.

[11] J. Banaś, M. Mursaleen, *Sequence Spaces and Measures of Noncompactness with Applications to Differential and Integral Equations*, Springer, New Delhi, 2014.

[12] J. Banaś, M. Mursaleen, S.M.H. Rizvi, Existence of solutions to a boundary-value problem for an infinite system of differential equations, *Electronic Journal of Differential Equations*, 262 (2017) 1-12.

[13] J. Banaś, B. Rzepka, On solutions of infinite systems of integral equations of Hammerstein type, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 18 (2017) 261-278.

[14] J. Banaś, B. Rzepka, The technique of Volterra–Stieltjes integral equations in the application to infinite systems of nonlinear integral equations of fractional orders, *Computers and Mathematics with Applications*, 64 (2012) 3108-3116.

[15] J. Banaś, W. Woś, Solvability of an infinite system of integral equations on the real half-axis, *Advances in Nonlinear Analysis*, 10,1 (2021) 202-216.

[16] J. Banaś, T. Zając, *Well-posed minimization problems via the theory of measures of noncompactness*, w: Mathematical Analysis and Applications, Selected Topics, red. M. Ruzhansky, H. Dutta, R.P. Agarwal, J. Wiley and Sons, 2018 553-586.

[17] C. Corduneanu, *Integral Equations and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[18] G. Darbo, Punti uniti in trasformazioni a condominio non compatto, *Rendiconti del Seminario Matematico della Università Di Padova*, 24 (1955) 84-92.

[19] A. Das, B. Hazarika, M. Mursaleen, Application of measure of noncompactness for solvability of the infinite system of integral equations in two variables in l_p $(1 < p < \infty)$, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales - Serie A: Matematicas*, 113,1 (2019) 31-40.

[20] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer, Berlin, 1985.

[21] K. Deimling, *Ordinary Differential Equations in Banach Spaces*, Lecture Notes in Mathematics 596, Springer, Berlin, 1977.

[22] J. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York, 1969.

[23] N. Dunford, J.T. Schwartz, *Linear Operators, Part I: General Theory*, International Publications, Leyden, 1963.

[24] L.S. Goldenštein, I.T. Gohberg, A.S. Markus, Investigations of some properties of bounded linear operators with their q-norms, *Učen. Zap. Kishinevsk. Univ.*, 29 (1957) 29-36.

[25] L.S. Goldenštein, A.S. Markus, On a measure of noncompactness of bounded sets and linear operators, in: *Studies in Algebra and Mathematical Analysis*, Kishinev (1965) 45-54.

[26] A. Hammerstein, Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen, *Acta Mathematica*, 54 (1930) 117-176.

[27] M.A. Krasnosielski, A.I. Koszelew, S.G. Michlin, Ł.S. Rakowszczik, W.J. Stiecenko, P.P. Zabrejko, *Równania Całkowe*, PWN, Warszawa, 1972 (wyd. w j. angielskim: P.P. Zabrejko, A.I. Koshelev, M.A. Krasnosel'ski, S.G. Mikhlin, L.S. Rakovschik, J. Statsenko, *Integral equations*, Nordhoff, Leyden, 1975).

[28] K. Kuratowski, Sur les espaces complets, *Fundamenta Mathematicae*, 15 (1930) 301-309.

[29] K. Kuratowski, *Topology I*, Academic Press - PWN - Polish Scientific Publishers, New York, London, Warszawa, 1966.

[30] M. Mursaleen, S.M.H. Rizvi, Solvability of infinite systems of second order differential equations in c_0 and l_1 by Meir-Keeler condensing operators, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 144 (2016) 4279-4289.

[31] R.D. Nussbaum, A generalization of the Ascoli theorem and an application to functional differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 35,3 (1971) 600-610.

[32] A. Piskorek, *Równania Całkowe. Elementy Teorii i Zastosowania*, WNT, Warszawa, 1977.

[33] W. Pogorzelski, *Równania Całkowe i ich Zastosowania*, PWN, Warszawa; Tom I - 1953, Tom II - 1958, Tom III - 1960, Tom IV - 1962 (wyd. w j. angielskim: W. Pogorzelski, *Integral Equations and Their Applications*, Pergamon Press, Oxford - New York - Frankfurt, PWN - Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1966).

[34] B. Rzepka, K. Sadarangani, On solutions of an infinite system of singular integral equations, *Mathematical and Computer Modelling*, 45 (2007) 1265-1271.