ANNALES UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA

LUBLIN-POLONIA

VOL.XLII,11 SECTIO AAA 1987

Instytut Fizyki UMCS

A. GÓŹDŹ, A. BARAN, J. SZYMONA, M. PIŁAT

# Teoriogrupowa analiza elementów optycznych w układach światłowodowych* I. Podstawy

## Group Theoretical Analysis of Optical Elements in Waveguide Systems I. Principles

## Теоретико-групповый анализ оптических элементов в системах световодов I. Принципы

Wprowadzenie transformacji Liego do optyki ma niedługą historię sięgającą początku lat osiemdziesiątych [1]. Transformacje Liego są pomostem łączącym optykę oraz mechanikę analityczną, pozwalającym wykorzystać wiele dobrze opracowanych technik rachunkowych formalizmu hamiltonowskiego oraz metod teorii grup. W artykule niniejszym (oraz następnych) przedstawimy opis propagacji światła w ośrodkach o zmiennym współczynniku załamania, na poziomie optyki geometrycznej z uwzględnieniem aberracji [2] oraz specyfiki układów światłowodowych. W dalszej kolejności przewidywane są prace nad „kwantyzacją" hamiltonianu optycznego pozwalającą uwzględnić falową naturę światła. Hamiltonowskie sformułowanie optyki geometrycznej opisuje promienie światła jako linie w optycznej przestrzeni fazowej $\mathbf{p} = \mathbf{p}(z)$ i $\mathbf{q} = \mathbf{q}(z)$, gdzie odpowiednikiem czasu z mechaniki klasycznej jest współrzędna „$z$" mierzona wzdłuż osi optycznej układu. Współrzędne uogólnione $q_1$ i $q_2$ wyznaczają punkt przecięcia się promienia światła w „chwili $z$" z płaszczyzną $z = \text{const}$. Pędy uogólnione $p_1$ i $p_2$ otrzymuje się z wariacyjnej zasady Fermata

$$\partial S = \partial \int ds = 0 , \tag{1}$$

*Praca finansowana z funduszy Problemu RR – I – 02 gdzie $ds = n\,dl = \frac{n}{\cos\theta}dz$ oznacza drogę optyczną, a $n(q, z)$ współczynnik załamania światła w punkcie $\mathbf{q}$. Kąt $\theta$ oznacza tu kąt pomiędzy normalną do płaszczyzny $(q_1, q_2)$ a kierunkiem promienia przecinającego tę płaszczyznę. Ponieważ tangens kąta $\theta$ można wyrazić przez „prędkości uogólnione" $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dz}$ według wzoru

$$\mathrm{tg}\,\theta = \sqrt{(\dot{q}_1)^2 + (\dot{q}_2)^2} \tag{2}$$

to funkcjonał (1) można przepisać w formie

$$S = \int L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, z)dz\,, \tag{3}$$

gdzie

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, z) = n(\mathbf{q}, z)\sqrt{1 + (\dot{q}_1)^2 + (\dot{q}_2)^2}\,. \tag{4}$$

Z funkcji (4) otrzymujemy pędy uogólnione odpowiadające współrzędnym uogólnionym $q_1$, $q_2$

$$p_i = \frac{\partial L}{d\dot{q}_i} = \frac{n(\mathbf{q}, z)}{\sqrt{1 + (\dot{q}_1)^2 + (\dot{q}_2)^2}}\dot{q}_i\,. \tag{5}$$

Wzory (4) i (5) prowadzą bezpośrednio do hamiltonianu optycznego

$$H = \sum p_i q_i - L = -\sqrt{n^2 - p^2}\,, \tag{6}$$

gdzie $p^2 = (p_1)^2 + (p_2)^2$.

Zgodnie z ogólnymi zasadami formalizmu kanonicznego z warunku wariacyjnego (1) otrzymujemy równania ruchu dla dowolnej funkcji $f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ określonej na przestrzeni fazowej

$$\frac{df}{dz} = -\{H, f\} = -\hat{H} f\,, \tag{7}$$

gdzie $\hat{H} = \{H, \cdot\}$ oznacza (operator) nawias Poissona. W ogólności rozwiązanie równania (7) z hamiltonianem (6) dla dowolnie zmieniającego się współczynnika załamania $n(\mathbf{q}, z)$ nie jest możliwe. Należy więc stosować rozwinięcia hamiltonianu (6) w szereg do określonego rzędu.

Doskonałym narzędziem pozwalającym otrzymywać przybliżone rozwiązania równania typu (7) dla złożonych układów optycznych jest analiza teoriogrupowa. Rozważmy nieskończoną algebrę jednomianów dowolnego stopnia $Z^N = p_1^{n_1} p_2^{n_2} q_1^{m_1} q_2^{m_2}$, $N = n_1 + n_2 + m_1 + m_2$, z działaniem Liego w postaci nawiasu Poissona [2]. Z algebrą tą można związać algebrę operatorów działających w przestrzeni fazowej. Operator odpowiadający funkcji $f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ definiujemy wzorem

$$\hat{f}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \{f(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \cdot\}\,. \tag{8}$$

Korzystając z tożsamości Jacobiego można pokazać, że zachodzi ważna równość

$$[\hat{f}, \hat{g}] = \{f, g\}\hat{}\;\,, \tag{9}$$

gdzie $[\hat{f},\hat{g}] = \hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f}$ oznacza komutator, a $\{\ ,\ \}\hat{}$ operator $\{\{f,g\},\cdot\}$. Bezpośrednio z definicji nawiasów Poissona można łatwo sprawdzić, że poniższy nawias Poissona

$$\{Z^{N_1}, Z^{N_2}\} = Z_1^N + Z_2^N + Z_3^N + Z_3^N\ ; \quad N = N_1 + N_2 - 2\,, \tag{10}$$

jest wielomianem złożonym z jednomianów stopnia $N = N_1 + N_2 - 2$. W szczególności dla $N_1 = N_2 = 2$ otrzymujemy dziesięciowymiarową algebrę generowaną przez jednomiany:

$$p_i p_j\,, \quad q_i q_j\,, \quad p_i q_j \qquad (i,j = 1,2)\,, \tag{11}$$

którą można zidentyfikować z algebrą Liego grupy symplektycznej $Sp(4,R)$. Łatwo można sprawdzić, że jednomiany

$$\chi_1^1 = \mathbf{p}^2 = (p_1)^2+(p_2)^2\,, \quad \chi_0^1 = \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} = p_1q_1+p_2q_2\,, \quad \chi_{-1}^1 = \mathbf{q}^2 = (q_1)^2+(q_2)^2 \tag{12}$$

także tworzą układ zamknięty względem nawiasu Poissona generując podalgebrę $sp(2,R)$. Na dodatek, jednomian

$$m_3 = q_1p_2 - q_2p_1 \tag{13}$$

generujący grupę $SO(2)$ komutuje z jednomianami (12). Własność ta pozwala napisać następujący łańcuch grupowy

$$Sp(4,R) \supset Sp(2,R) \times SO(2) \tag{14}$$

odpowiedni do opisu układów optycznych o symetrii osiowej. Wynika to z faktu, że grupa $SO(2)$ generowana przez operator $\hat{m}_3 = \{m_3,\cdot\}$ jest grupą obrotów przestrzeni fazowej wokół osi optycznej „$z$" i dla hamiltonianu (6) niezmienniczego względem transformacji $SO(2)$ układ optyczny musi posiadać oś symetrii. Jednocześnie należy zauważyć, że w tym przypadku hamiltonian optyczny (6) jest funkcją *tylko elementów algebry* $sp(2,R)$.

Uwzględnienie wyższych rzędów rozwinięcia hamiltonianu (6) niż drugi wymaga rozszerzenia algebry $sp(4,R)$ (dla układów osiowo symetrycznych $sp(2,R)$) o algebrę jednomianów wyższych stopni. Jak widać z zależności (10) jakiekolwiek wyjście poza algebrę $sp(4,R)$ wymaga włączenia do rachunku jednomianów dowolnego stopnia. Problem ten można rozwiązać tworząc algebrę ilorazową. Należy zauważyć, że dla dowolnego ustalonego $N_a > 2$ jednomiany stopnia wyższego niż $N_a + 1$ tworzą nieskończoną algebrę, którą oznaczymy $a^{>N_a+1}$. Algebra ta stanowi ideał pełnej algebry jednomianów $a^{>}$, a więc można utworzyć algebrę ilorazową opisującą nieliniowe efekty optyczne [2]

$$a^{N_a+1} = a^{>}/a^{N_a+1}\,. \tag{15}$$

Mówiąc inaczej, algebra $a^{N_a}$ jest utworzona ze wszystkich jednomianów $Z^2, Z^3, \ldots, Z^{N_a+1}$ z iloczynem Liego przyjmowanym jako zero, gdy otrzymane jednomiany są stopnia wyższego niż $N_a + 1$. Dla układów osiowo symetrycznych algebra (15) ulega zawężeniu tylko do jednomianów złożonych z elementów algebry $sp(2, R)$.

Zasadniczą ideą dalszego postępowania jest użycie przybliżenia hamiltonianu (6) wyznaczonego przez algebrę $a^{N_a}$. W tym przybliżeniu hamiltonian $H$ staje się elementem algebry $a^{N_a}$, skąd wynika, że ewolucję promienia świetlnego można opisać przy pomocy transformacji należących do grupy Liego $A^{N_a}$ odpowiadającej algebrze $a^{N_a}$. Niech $f(\mathbf{p}, \mathbf{q}; z)$ oznacza interesującą nas funkcję określoną na optycznej przestrzeni fazowej. Z teorii równań kanonicznych wiadomo, że dla równania (7) istnieje operator ewolucji $G_H(z)$ zdefiniowany wzorem

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{q}; 0) \xrightarrow{z} f(\mathbf{p}, \mathbf{q}; z) = G_H(z) f(\mathbf{p}, \mathbf{q}; 0) = f(\mathbf{p}', \mathbf{q}'; 0) \tag{16}$$

Wstawiając definicję (16) do równania (7) otrzymujemy równanie na operator ewolucji promienia świetlnego

$$\frac{d}{dz} G_H(z) = -\hat{H} G_H(z) \,. \tag{17}$$

Z drugiej strony, dla każdego $z$, $G_H(z)$ musi być elementem grupy transformacji optycznych $A^{N_a}$. Wymóg ten oznacza istnienie właściwej dla rozwiązywanego problemu trajektorii $a(z)$ na rozmaitości grupowej $A^{N_a}$ takiej, że

$$A^{N_a} \ni \mathcal{G}(a(z)) = G_H(z) \,. \tag{18}$$

Wstawiając równość (18) do równania (17) otrzymujemy równanie określające trjektorię, wzdłuż której ewoluuje promień świetlny

$$\frac{d}{dz} \mathcal{G}(a(z)) = -\hat{H} \mathcal{G}(a(z)) \,, \tag{19}$$

tzn. operator $\hat{H}$ jest wektorem stycznym do linii $a = a(z)$. W najprostszej a zarazem najważniejszej praktycznie sytuacji, gdy światłowód jest jednorodny wzdłuż osi optycznej „$z$", hamiltonian optyczny jest niezależny od $z$ i równanie (19) można bezpośrednio scałkować otrzymując eksponencjalny operator ewolucji promienia świetlnego

$$G_H(z) = \mathcal{G}(a(z)) = e^{-z\hat{H}} \,. \tag{20}$$

Z (20) wynika, iż w tym przypadku operator ewolucji tworzy jednoparametrową podgrupę transformacji optycznych, którą można skonstruować przy pomocy standardowych metod teorii grup. W ogólnym przypadku hamiltonianu optycznego zależnego od $z$ należy rozwiązać równanie (19) [2].

*Dużą zaletą opisanej powyżej metody jest jej niezależność od warunków początkowych, pozwalająca rozważać zarówno światłowody długie jak i krótkie oraz systemy światłowodów połączonych w różny sposób. Wynika to z faktu, iż można znaleźć operatory ewolucji promienia świetlnego (lub jakiejkolwiek funkcji opisującej wiązki promieni) dla każdego podukładu i w końcowym etapie rachunku je poskładać.*

Jako przykład ilustrujący opisaną wyżej metodę postępowania, będący zarazem podstawą dalszych rozważań, przebadajmy osiowo symetryczny światłowód gradientowy o współczynniku załamania określonym funkcją

$$n(q) = n_0 - \nu q^2 \qquad (q^2 = \mathbf{q}^2 , \; n_0, \nu = \text{ const }) . \tag{21}$$

W celu uproszczenia rachunków przyjmijmy przybliżenie optyki gaussowskiej, dla której grupą transformacji optycznych jest grupa symplektyczna $Sp(2, R)$. W tym przybliżeniu hamiltonian optyczny zapisujemy w postaci

$$H = \frac{p^2}{2n_0} + \nu q^2 , \tag{22}$$

gdyż generatorami grupy $Sp(2, R)$ są trzy jednomiany (12), a hamiltonian optyczny musi być ich kombinacją liniową. Ogólną postać elementów grupy $Sp(2, R)$, jako grupy transformacji optycznych w przestrzeni fazowej można zapisać w postaci wykładniczej [2]

$$\mathcal{G}(M(\mathbf{u})) = \exp(u_{-1}\hat{\chi}^1_{-1} + u_0\hat{\chi}^1_{-1} + u_1\hat{\chi}^1_{-1}) , \tag{23}$$

gdzie $M(\mathbf{u})$ oznacza podstawową, dwuwymiarową reprezentację macierzową grupy $Sp(2, R)$ sparametryzowaną zmiennymi $u_m$; $m = -1, 0, 1$. Aby znaleźć postać $M(\mathbf{u})$ wyznaczmy działanie generatorów $\hat{\chi}^1_m$ na punkty przestrzeni fazowej

$$\begin{gathered}
\hat{\chi}^1_0 \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ -\mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \\
\hat{\chi}^1_1 \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\,\mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \\
\hat{\chi}^1_{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,\mathbf{q} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}
\end{gathered} \tag{24}$$

Zgodnie z ogólną definicją działania operatorów grupy transformacji na przestrzeniach funkcji [3] macierzowymi odpowiednikami generatorów $\hat{\chi}^1_m$ są

$$\begin{gathered}
\hat{\chi}^1_0 \to \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\hat{\chi}^1_{-1} \to \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\hat{\chi}^1_1 \to \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} .
\end{gathered} \tag{25}$$

Stąd wynika, że podstawowa, dwuwymiarowa reprezentacja grupy $Sp(2, R)$ może być zapisana w formie

$$
\begin{aligned}
M(\mathbf{u}) &= \exp\left\{u_{-1}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + u_0\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + u_1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right\} = \\
&= \exp\left\{\begin{bmatrix} -u_0 & -2u_{-1} \\ 2u_1 & u_0 \end{bmatrix}\right\}.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Korzystając ze znanych wzorów [4] macierz (26) można przepisać w prostszej do zastosowań postaci

$$
M(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}\omega - u_0\dfrac{\operatorname{sh}\omega}{\omega} & -2u_1\dfrac{\operatorname{sh}\omega}{\omega} \\ 2u_1\dfrac{\operatorname{sh}\omega}{\omega} & \operatorname{ch}\omega + u_0\dfrac{\operatorname{sh}\omega}{\omega} \end{bmatrix}, \tag{27}
$$

gdzie $\omega = \pm\sqrt{u_0^2 - 4u_1u_{-1}}$.

Wynik ten jest identyczny z rezultatem podanym w pracy [2].

Po tym przygotowaniu możemy podać macierzową reprezentację hamiltonianu (22), który w postaci operatorowej zapisujemy jako kombinację liniową generatorów $\hat{X}^1_m$

$$
\hat{H} = \frac{1}{2n_0}\hat{X}^1_1 + \nu\hat{X}^1_{-1}\,. \tag{28}
$$

Korzystając ze wzorów (25) otrzymujemy

$$
\hat{H} \longleftrightarrow \underline{H} = \begin{bmatrix} 0 & -2\nu \\ \dfrac{1}{n_0} & 0 \end{bmatrix} \in sp(2, R) \tag{29}
$$

Z równania (20) otrzymujemy, że operator ewolucji układu optycznego opisywanego równaniem (7) jest jednoparametrową podgrupą grupy transformacji optycznych generowaną przez hamiltonian (29)

$$
G_{\underline{H}}(z) = e^{z\underline{H}}\,. \tag{30}
$$

Analogicznie jak w przypadku macierzy (26) macierz (30) można zapisać w zwartej formie

$$
G_{\underline{H}}(z) = \begin{bmatrix} \cos\kappa z & -\kappa n_0 \sin\kappa z \\ \dfrac{1}{\kappa n_0}\sin\kappa z & \cos\kappa z \end{bmatrix}, \tag{31}
$$

gdzie $\kappa = \pm\sqrt{\dfrac{2\nu}{n_0}}$. Stąd natychmiast otrzymujemy równanie opisujące dynamikę promienia świetlnego wchodzącego do światłowodu w punkcie $\mathbf{q}$ o pędzie (kierunku) p

$$\begin{bmatrix} p'(z) \\ q'(z) \end{bmatrix} = G_{\underline{H}}(z) = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \cos \kappa z - q\ \kappa n_0 \sin \kappa z \\ p \dfrac{1}{\kappa n_0} \sin \kappa z + q \cos \kappa z \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Wzór (32) opisuje oscylacyjny ruch promienia świetlnego w światłowodzie o współczynniku załamania określonym przez równość (21). Częstość oscylacji jest pierwiastkiem z podwojonego stosunku gradientu zmiany współczynnika załamania do jego wartości na osi światłowodu. W użytym przybliżeniu wzory (32) nie uwzględniają żadnych aberracji optycznych. Problem ten jest tematem następnych artykułów.

## REFERENCES


[1] Dragt A. J.: *Opt. Soc. Am.*, 72, 372, (1982); *Lectures on Nonlinear Orbit Dynamics*, AIP Conference Proceedings vol. 87 (AIP, New York, 1982).

[2] Navarro-Saad M., Wolf K. B.: *J. Math. Phys.*, 27, 1449, (1986); Wolf K. B.: *J. Math. Phys.*, 27, 1458, (1986).

[3] Hammermesh M.: Tooria grup w zastosowaniu do zagadnień fizycznych, § 3.7, PWN, Warszawa, 1968.

[4] Kiryłłow A. A.: Elementy teorii predstawlenij, str. 118, Nauka, Moskwa, 1978.


## SUMMARY


In the paper the principles of group theory analysis for light propagation in the optical waveguides with a graded refraction coefficient is presented.


## РЕЗЮМЕ


В работе представлено принципы теоретико-группового анализа пропагации света в световоде с переменным коэффициентом преломления.


Złożone 21.X.1988