ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. XXXIX, 4 SECTIO AAA 1984

Instytut Fizyki UMCS
Zakład Fizyki Jądrowej
Kierownik: prof. dr hab. Tomasz Goworek

Longin GŁADYSZEWSKI

O pomiarach parametrów funkcji statystycznych stosowanych do opisu szumów w obecności tła aparaturowego

The Determination of the Statistical Parameters of Stochastic Signals in the Presence of Apparatus Noise

Измерение статистических свойств флуктуаций при наличии аппаратурных шумов

WSTĘP

Niniejsze opracowanie powstało w wyniku prac nad fluktuacjami /szumami/ prądów termoemisji jonowej w spektrometrach mas.

Strumień jonów powstający w źródle spektrometru ma zwykle natężenie mniejsze niż 10^{-8} A. Po wejściu w sektorowe pole magnetyczne następuje rozdzielenie izotopów i do kolektora jonów dociera izotopowy strumień o natężeniu mniejszym niż 10^{-10} A. Klasyczny sposób rejestracji polega na skierowaniu tego strumienia do kolektora jonów i wzmacnianiu we wzmacniaczu elektrometrycznym o dużym oporze wejściowym. Pomiar natężenia prądu jonowego odpowiedniego izotopu spośród kilku izotopów dostarcza wiadomości o składzie izotopowym analizowanej próbki, procesach zachodzących na powierzchni emitera, reakcjach chemicznych w źródle, wyróżnieniu izotopowym następującym w procesie desorpcji termicznej itd.

Warto w tym miejscu stwierdzić, że z punktu widzenia statystyki matematycznej, wiadomości te uzyskuje się poprzez pomiar jedynie wartości średniej natężenia prądu /składowej stałej/. W tych typowych badaniach pomija się fakt istnienia fluktuacji płynącego prądu jonowego. Zatem słuszne wydaje się mniemanie, że średnie wyższego rzędu, tzw. momenty centralne rozkładu chwilowych wartości amplitud fluktuacji mogą dostarczyć bogatszych wiadomości o zachodzących na powierzchni jonizującej procesach takich, jak: desorpcja, dyfuzja powierzchniowa, jonizacja i innych, zachodzących na powierzchni ciał stałych, w warunkach wysokich temperatur. Podobnie parametry innych funkcji statystycznych /funkcji autokorelacji, funkcji spektralnej gęstości mocy/ mogą dostarczyć pełniejszego opisu tych procesów.

PROBLEMY APARATUROWE

W przypadku badań fluktuacji prądów jonowych należy stosować elektrometryczne wzmacniacze szerokopasmowe [1] . Poszerzenie pasma wzmacnianych częstości może być uzyskane przez zastosowanie wzmacniaczy z ujemnym sprzężeniem zwrotnym. W przypadku tzw. 100-procentowego ujemnego sprzężenia zwrotnego, wzmacniacz taki możemy nazwać "przetwornikiem: prąd-napięcie". W układzie takim, dla składowej stałej zachodzi: $U_o = i_o \cdot R_{we}$, zaś dla chwilowej wartości fluktuacji: $U_{/t/} = i_{/t/} \cdot R_{we}$. Dla wyższych częstości wzmacnianego pasma może zachodzić zmniejszenie współczynnika wzmocnienia wzmacniacza oraz zmniejszenie jego oporu wejściowego. Ten fakt należy uwzględnić poprzez odpowiednie cechowanie toru wzmacniającego i wyznaczenie współczynnika przetwarzania $\mathcal{H}$, $/U = \mathcal{H} \cdot i/$, który maleje monotonicznie wraz ze wzrostem częstości. Współczynnik ten, jako funkcję częstości, można precyzyjnie wyznaczyć przez modulację strumienia jonów sygnałem sinusoidalnym i pomiar powstałej składowej $i_o \sin \omega t$ przy różnych częstościach.

FUNKCJE STATYSTYCZNE STOSOWANE DO OPISU FLUKTUACJI PRĄDÓW

Opis fluktuacji /szumów/ może być dokonany przez podanie trzech funkcji statystycznych: spektralnej gęstości mocy, gęstości prawdopodobieństwa, zwanej inaczej rozkładem chwilowych wartości amplitud fluktuacji oraz funkcji autokorelacji.

F u n k c j a s p e k t r a l n e j g ę s t o ś c i m o c y S_f opisuje zależności częstościowe zawarte w sygnale szumowym.

$$S_f = \lim_{\Delta f \to 0} \frac{1}{\Delta f} \left[\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T i^2_{/t/}\, dt \right] \qquad /1/$$

Eksperymentalnie funkcję tę wyznacza się, stosując przestrajalny filtr środkowo-przepustowy o małej szerokości pasma Δf i dokonując pomiaru średniej wartości kwadratu fluktuacji dla nastawionej aktualnie częstości f_i. Elektroniczne uśrednianie następuje po zastosowaniu obwodu RC o dużej stałej czasowej T.

Wartość średniokwadratowa sygnału szumowego w paśmie od f_1 do f_2 jest związana z funkcją spektralnej gęstości mocy w następujący sposób:

$$\left\langle i^2_{/t/} \right\rangle = \int_{f_1}^{f_2} S_f \, d_f . \qquad /2/$$

Błąd względny ε_s popełniony przy pomiarze S_f zależy od zastosowanego pasma Δf oraz stałej czasowej T obwodu uśredniającego i dla przypadku fluktuacji o rozkładzie normalnym wynosi:

$$\varepsilon_S = \sqrt{1/\,\Delta f \cdot T} . \qquad /3/$$

Podany wyżej błąd względny charakteryzuje część losową błędu. W przypadku widm z ostrą zależnością S_f od f może wystąpić znaczny błąd systematyczny /błąd obciążenia estymatora funkcji S/, [1] :

$\sigma_s = \Delta f^2 /24 \cdot S''/S$, gdzie S" jest drugą pochodną funkcji S względem zmiennej f.

W przypadku widm ciągłych, bez ostrych maksimów, część systematyczną błędu można zaniedbać.

W trudnych warunkach eksperymentalnych, gdy poziom mierzonych szumów jest niewielki, istotne mogą stać się szumy własne układu pomiarowego. W takim przypadku można uwzględnić przyczynek szumu aparaturowego korzystając z twierdzenia : "spektralne gęstości mocy szumów nieskorelowanych dodają się". Zatem, w naszym przypadku: $S_f = S_e - S_a$. W ostatnim wzorze S_e oznacza funkcję S wyznaczoną wprost z pomiaru, natomiast S_a jest spektralną gęstością mocy szumu aparaturowego, wyznaczoną w wyniku osobnego pomiaru.

Podczas pomiarów fluktuacji termoemisyjnych prądów jonowych w spektrometrze mas, okresowo co 20 sek. wyłączano napięcie przyspieszające jony i układy pomiarowe rejestrowały na taśmie samopisu lub za pomocą woltomierza cyfrowego i drukarki poziom szumów aparaturowych S_a, na przemian z szumami S_e notowanymi przy pracującym źródle jonów.

W bardzo wielu zjawiskach fizycznych występujące fluktuacje posiadają widmo $S_f = a \cdot 1/f$ [2 , 3] . Wraz ze wzrostem częstości poziom badanych szumów maleje, osiągając przy pewnej częstości f_o poziom szumów śrutowych. Te ostatnie szumy charakteryzują się szumem białym i dla wszelkich procesów emisji elektronów lub jonów dane są wyrażeniem : $S_s = 2 e i_o$ /i_o - natężenie składowej stałej/.

Jeśli w badanym zjawisku emisji, szum typu "1/f" i szum śrutowy można traktować jako nieskorelowane, wtedy podczas pomiarów można uwzględnić również wkład szumu śrutowego: $S_f = S_e - S_a - S_s$. Pomiary takie można prowadzić powyżej granicznej częstości f_o, aż do momentu, gdy poszukiwana wartość S_f osiągnie poziom fluktuacji statystycznych przeważającego wtedy szumu śrutowego $S_s / \sqrt{\Delta f \cdot T}$.

Wielu zjawiskom fizycznym towarzyszą fluktuacje o widmie lorentzowskim: $S_f = S_o / 1 + /\omega\tau/^2$, $\omega = 2\pi f$. Takie widmo obserwuje się w przypadku szumów generacyjno-rekombinacyjnych półprzewodników, a stała czasowa τ ma charakter średniego czasu życia nośników prądu [4] .

F u n k c j a a u t o k o r e l a c j i dostarcza wiadomości o zależnościach czasowych, występujących w wielkościach fluktuujących. Definiuje się ją jako średnią wartość iloczynu $R_{/\Delta t/} = \langle i_{/t/} \cdot i_{/t+\Delta t/} \rangle$. Unormowana funkcja autokorelacji ma postać:

$$\varrho_{/\Delta t/} = \langle i_{/t/} \cdot i_{/t+\Delta t/} \rangle / \langle i^2 \rangle . \qquad /4/$$

Analogowa metoda wyznaczania funkcji autokorelacji polega na kolejnym wprowadzaniu wzrastających opóźnień badanego sygnału i wyliczaniu średnich wartości iloczynu sygnału nieopóźnionego i opóźnionego dla każdej wartości opóźnienia Δt..Uzyskany wykres funkcji $R_{/\Delta t/}$ w zależności od Δt nazywamy autokorelogramem.

Względny błąd standardowy popełniony przy wyznaczaniu kolejnych wartości funkcji $R_{/\Delta t/}$ można wyliczyć następująco:

$$\varepsilon_R = 1/\sqrt{2\Delta f T} \cdot \left[1 + \left(R_{/o/}/R_{/\Delta t/} \right)^2 \right]^{1/2},$$

natomiast dla zerowego opóźnienia:

$$\varepsilon_o = 1/\sqrt{2\Delta f \cdot T} . \qquad /5/$$

Funkcja $R_{/\Delta t/}$ procesu stacjonarnego jest funkcją parzystą: $R_{/\Delta t/} = R_{/-\Delta t/}$. Jeśli $\Delta t = 0$, to dla procesu o wartości średniej równej zero funkcja autokorelacji jest równa średniemu kwadratowi amplitudy szumu $R_{/o/} = \langle i^2 \rangle$, natomiast dla $\Delta t \rightarrow \infty$ wartości chwilowe fluktuacji stają się niezależne i $R_{/\infty/} = 0$..

Na podstawie twierdzenia: "funkcja autokorelacji sumy dwu sygnałów stacjonarnych i nieskorelowanych jest sumą funkcji autokorelacji tych sygnałów" [7], możemy podczas pomiarów uwzględnić wkład szumu aparaturowego: $R_{/\Delta t/} = R_e - R_a$, gdzie przez $R_{/\Delta t/}$ oznaczono funkcję autokorelacji badanego procesu, przez R_e - funkcję autokorelacji uzyskaną na drodze eksperymentalnej za pomocą aparatury ze znacznymi szumami własnymi zaś przez R_a - funkcję autokorelacji szumu aparaturowego.

F u n k c j a g ę s t o ś c i p r a w d o p o d o b i e ń s t w a p może być zdefiniowana jako graniczna wartość stosunku prawdopodobieństwa P wystąpienia fluktuacji o danej amplitudzie do wielkości przedziału amplitud Δi w którym dokonuje się pomiaru.

$$p = \lim_{\Delta i \to 0} \frac{P\left[i < i_t < i + \Delta i\right]}{\Delta i} \qquad /6/$$

Dla dostatecznie małych wartości "okna analizatora" Δi :

$$p = P/\Delta i \qquad /7/$$

Pomiaru funkcji gęstości prawdopodobieństwa można dokonać przy pomocy analizatorów amplitudy powszechnie stosowanych w eksperymentach z dziedziny fizyki jądrowej. Analizatory takie dokonują zliczeń dochodzących doń fluktuacji, segregując je wedle skokowo zaprogramowanych przedziałów amplitud /kanałów/.

Większość sygnałów losowych ma rozkład normalny. Istnieją jednak przypadki sygnałów losowych mających rozkłady znacznie odbiegające od rozkładu Gaussa [5, 6], dlatego w każdym przypadku badania szumów należy przeprowadzić pomiary rozkładów wartości chwilowych amplitud fluktuacji i wykonać test normalności rozkładu [1].

Bardzo często uzyskane na drodze eksperymentalnej rozkłady amplitudowe nie dają się prosto aproksymować za pomocą znanych funkcji rozkładu. Wtedy należy możliwie dokładnie scharakteryzować otrzymany rozkład przez podanie jego tzw. momentów centralnych.

Momentem centralnym k-tego rzędu μ_k będziemy nazywać wartość średnią k-tej potęgi różnicy $(i_t - m)^k$: $\mu_k = \left\langle (i - m)^k \right\rangle$ gdzie m jest wartością oczekiwaną /średnią/ wyliczaną następująco: $m = \sum_{j=1}^{n} i_j p_j$, zaś i_j to możliwe wartości zmiennej losowej i_t, natomiast p_j - prawdopodobieństwo wystąpienia wartości i_j.

Dostatecznie dobrą dokładność opisu uzyskuje się poprzestając na pierwszych czterech momentach rozkładu eksperymentalnego, otrzymanego na drodze skokowego przesuwania okna Δi analizatora. Wtedy rozkład taki jest histogramem, a zmienna losowa /szum/ występuje w postaci danych dyskretnych.

Moment zwykły pierwszy był już definiowany wcześniej jako tzw. wartość oczekiwana. Jest on liczony względem początku układu współrzędnych. Moment drugi, zwany wariancją $\mu_2 = \sum_j /i_j-m/^2 p_j$ liczony jest względem wartości średniej m. Moment trzeci i czwarty podaje się zwykle w postaci znormalizowanej jako parametry:skośność /ang. skewness/ $Sk = \mu_3/\sigma^3$ i wskaźnik ekscesu /kurtoza/ $Ex = \mu_4/\sigma^4$.

Dla rozkładów normalnych momenty centralne nieparzyste $\mu_n = 0$ dla n = 1, 3, 5 ..., zaś parzyste: $\mu_k = /k-1/\sigma^k$ dla k = 2, 4, 6, ..., zatem $\mu_2 = \sigma^2$, $\mu_4 = 3\sigma^4$, itd. Stąd skośność Sk = 0 zaś kurtoza Ex = 3. Jeśli dane z eksperymentu stanowią zbiór dyskretnych wartości amplitud szumu, wtedy momenty centralne można obliczyć następująco:

$$\mu_k = (1/N-1)\sum_j (i_j - m)^k \cdot n_j$$

n_j jest tu liczbą amplitud szumu wartości i_j, natomiast N jest liczbą wszystkich amplitud.

Analityczną postać zapisu funkcji rozkładu eksperymentalnego można uzyskać stosując wyrażenia aproksymujące typu funkcji Pearsona, uwzględniających cztery momenty centralne [8, 9], lub wyrażenia w postaci szeregu Edgewortha [13, 14] w którym, przy niewielkich odstępstwach rozkładu znalezionego eksperymentalnie od rozkładu normalnego : $p = 0,5 + 0,5\,p_o - 1/6\,Sk \cdot p_2 + 1/24 \cdot Ex \cdot p_3$, gdzie p_o jest rozkładem normalnym a p_2 i p_3 są pochodnymi, odpowiednio II i III rzędu gęstości normalnej p_o.

Podczas przeprowadzania pomiarów rozkładów amplitudowych, zmierzających do wyznaczenia momentów centralnych, powstaje bardzo ważne zagadnienie uwzględnienia wpływu momentów rozkładu szumów aparaturowych. Wprowadźmy wielkości λ_i zwane semiinwariantami [10], wyrażające się poprzez momenty w następujący sposób:

$$\lambda_1 = m, \quad \lambda_2 = \mu_2 = \sigma^2, \quad \lambda_3 = \mu_3, \quad \lambda_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2 . \qquad /8/$$

Jeśli sygnał szumowy będący obiektem badań dodamy do szumu aparaturowego, wtedy dla sygnału łącznego $i_e = i_t + i_a$ możemy zapisać wyrażenie, stwierdzające fakt addytywności semiinwariantów [10] :

$$\lambda_e^{(k)} = \lambda^{(k)} + \lambda_a^{(k)} \qquad /9/$$

Powyższe równanie rozpisane dla konkretnych momentów /wzory 8/ pozwoli łatwo obliczyć momenty $\mu^{(k)}$ poszukiwanego rozkładu, gdy dysponujemy eksperymentalnie wyznaczonymi momentami $\mu_e^{(k)}$ rozkładu łącznego i momentami $\mu_a^{(k)}$ rozkładu szumów aparaturowych:

$$\mu_e^{(1)} = \mu^{(1)} + \mu_a^{(1)}$$

$$\mu_e^{(2)} = \mu^{(2)} + \mu_a^{(2)} \qquad /10/$$

$$\mu_e^{(3)} = \mu^{(3)} + \mu_a^{(3)}$$

$$\mu_e^{(4)} = \mu^{(4)} + \mu_a^{(4)} - 3\left[\mu^{(2)^2} + \mu_a^{(2)^2}\right] + 3\mu_e^{(2)^2}$$

Jeśli wyznaczymy eksperymentalnie funkcję gęstości prawdopodobieństwa, to dla każdej analizowanej amplitudy fluktuacji i_t, w ograniczonym paśmie $F = f_2 - f_1$ /czyli dla każdego kanału analizatora/ możemy wyliczyć błąd względny statystyczny:

$$\varepsilon_p = 1/\sqrt{2 \cdot F \cdot T \cdot \Delta i/\sigma}$$

W powyższym wzorze T oznacza łączny czas analizy za pomocą analizatora wielokanałowego, zaś $\Delta i/\sigma$ względną wielkość przedziału amplitud fluktuacji /wielkość "okna" analizatora/, [11].

Błędy popełnione przy wyznaczaniu poszczególnych momentów można oszacować według poniższych zależności [8, 12]:

$$\mathcal{E}_{(1)} = \sigma / \sqrt{N}$$

$$\mathcal{E}_{(2)} = \sqrt{2(N-1)/N^2} \cdot \sigma^2$$

$$\mathcal{E}_{(Sk)} = \sqrt{6(N-1)/(N+1)(N+3)}$$

$$\mathcal{E}_{(Ex)} = \sqrt{24N(N-2)(N-3)/(N-1)^2(N+3)(N+5)} \qquad /11/$$

T w i e r d z e n i e   W i e n e r a - C h i n c z y n a. "Funkcja spektralnej gęstości mocy stacjonarnego procesu losowego jest transformatą Fouriera funkcji autokorelacji tego procesu":

$$S_{(\omega)} = 4 \int_0^\infty R_{(\tau)} \cos(\omega\tau)\, d\tau \quad ;$$

τ-opóźnienie /we wzorze /4/ oznaczone przez Δt/. Zastosowanie transformaty odwrotnej funkcji $S_{/w/}$ daje w rezultacie:

$$R_{(\tau)} = \int_0^\infty S_{(\omega)} \cos(\omega\tau)\, df$$

W wielu zjawiskach funkcja autokorelacji ma postać wykładniczą. Za pomocą relacji Wienera-Chinczyna można łatwo udowodnić, że spektralna gęstość mocy ma wtedy kształt lorentzowski:

$$R_{(\tau)} = \sigma^2 \cdot \exp\left[-\tau/\tau_0\right], \qquad S_f = 4\tau_0/\left[1 + (2\pi f \tau_0)^2\right]. \qquad /12/$$

Z twierdzenia Wienera-Chinczyna wynika możliwość wyznaczania funkcji spektralnej gęstości mocy poprzez funkcję autokorelacji. Operację tę obecnie częściej wykonuje się cyfrowo niż analogowo. W pierwszym rzędzie dokonuje się próbkowania analizowanego przebiegu szumowego. Dane z tej operacji służą do wyznaczenia funkcji autokorelacji. Funkcja ta, w postaci dyskretnych danych, otrzymanych dla różnych, skokowo wprowadzanych opóźnień jest wyjściową dla komputerowego programu transformacji Fouriera.

Należy zauważyć, że metoda filtracji-bezpośredniego wyznaczania funkcji S_f jest zupełnie równoważna metodzie funkcji autokorelacji, pod warunkiem, że proces jest stacjonarny.

Decyzja o wyborze metody podyktowana jest zwykle przez warunki aparaturowe i ewentualny dostęp do komputera.

PIŚMIENNICTWO

1. Bendat J. S., Piersol A. G.: Metody analizy i pomiaru sygnałów losowych, PWN, Warszawa 1976.
2. Tandon J. L., Bilger H. R.: J. Appl. Phys., vol. 47, 1697 /1976/.
3. Kusy A.: Rozprawy elektrotechniczne, T. 24, Nr 3, 715, /1978/.
4. Van Vliet K. M., Fasset J. R.: Fluctuation Phenomena in Solids, wyd. Burgess R.E., Acad Press, New York 1965.
5. Naryszkin A. K., Wraczow A. S.: Teorija niskoczastotnych szumow, Moskwa 1972.
6. Gładyszewski L.: Surface Research, Proc. of the 3-rd Semin. on Surface Physics, Wrocław-Kudowa, 121, /1979/.
7. Szabatin J.: Podstawy teorii sygnałów, WKŁ, Warszawa 1982.
8. Dunin-Barkowski I. W., Smirnow N. W.: Teorija wierojatnostiej i matiematiczeskaja statistika w tiechnikie, Moskwa 1955.
9. Zieliński R.: Tablice statystyczne, PWN, Warszawa 1972.
10. Middleton D.: Introduction to Statistical Communication Theory, Mc Graw-Hill, New York 1960.
11. Lisiecki W., Scharf W.: Spektrometry rozkładów amplitudowych, PWN, Warszawa 1973.
12. Moore W. J.: J. Appl. Phys., vol. 45, 1896, /1974/.
13. Feller W.: Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, PWN, Warszawa 1981, t. II.

14. D i n e r I. J. , G a n i n M. P. , K o m a r o w L. B. : Rachunek prawdopodobieństwa w problemach i zadaniach PWN, Warszawa 1979.

Dodatkowe monografie nie cytowane w pracy:

15. D a v e n p o r t W. B. , R o o t W. L. : Introduction to the Theory of Random Signals and Noise, Mc Graw-Hill, New York 1958.
16. V a n d e r Z i e l A. : Fluctuation Phenomena in Semi-Conductors, London 1959.
17. B e l l D. A. : Electrical Noise, Van Nostrand, London 1960.
18. M a c D o n a l d D. K. : Noise and Fluctuations, J. Wiley, New York 1962.
19. S w i e s z n i k o w A. A. : Podstawowa metody funkcji losowych, PWN, Warszawa 1965.
20. V a n d e r Z i e l A.:Noise, Sources, Characterization, Measurement, Prentice Hall, New York 1970.
21. P a p o u l i s A. : Prawdopodobieństwo, Zmienne losowe i procesy stochastyczne, WNT, Warszawa 1972.
22. B e a u c h a m p K. G. : Przetwarzanie sygnałów metodami analogowymi i cyfrowymi, WNT, Warszawa 1978.
23. K u s y A. : Struktura, mechanizm przewodnictwa oraz szumy typu 1/f rezystywnych warstw grubych, Politechnika Rzeszowska, Rzeszów 1979
24. W o j n a r A. : Teoria sygnałów, WNT, Warszawa 1980.
25. H a s s e L. , S p i r a l s k i L. : Szumy elementów i układów elektronicznych, WNT, Warszawa 1981.

SUMMARY

A short discussion of the analog measurement technique of the statistical parameters of stochastic signals in the presence of apparatus noise is given. Three main types of statistical functions are used to describe the basic properties of random signals: probability density function, spectral density function and autocorrelation function.

РЕЗЮМЕ

В работе даны замечания об вычислении параметров статистических функций электрических флюктуаций при наличии аппаратурных шумов. Описаны: автокорреляционная функция, функция спектральной плотности и функция амплитудного расспределения.

Представлено также дискуссию ошибок совершенных при измерении этих функций. Представлен способ вычисления вклада аппаратурных шумов в измеряемые параметры статистических функций.

Złożono w Redakcji 1985.01.09