ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. VII, 3. SECTIO AA 1952

Z Zakładu Fizyki Doświadczalnej Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. U. M. C. S. w Lublinie
Kierownik: prof. dr Stanisław Ziemecki

Armin TESKE

Elementarne wyprowadzenie wzoru Einsteina na średni kwadrat przesunięcia i warunku ograniczającego

Элементарное выведение формулы Эйнштейна на средний квадрат смещения и ограничивающего условия

Elementare Ableitung der Einsteinschen Formel für das mittlere Verschiebungsquadrat

Podane niżej wyprowadzenie słynnego wzoru Einsteina różni się od innych elementarnym charakterem środków matematycznych. Nie zakłada np. znajomości rachunku różniczkowego, czy całkowego. Że takie wyprowadzenie jest możliwe, że prowadzi do poprawnego współczynnika liczbowego, zasługuje może na pewną uwagę.

Co do znaczenia dydaktycznego, chodziłoby nie tylko o to, że tego rodzaju wywód umożliwi pewne zaznajomienie się z teorią ruchów Browna tym, którzy nie znają matematyki wyższej *), lecz także o okoliczność następującą. Aparat matematyczny zasłania częstokroć, także studentom wydziałów matematyczno-przyrodniczych, rzeczywistość fizyczną. Im prostszy będzie, tym jaśniej wystąpi poglądowa treść fizyczna zagadnienia.

---

*) Szersze omówienie dydaktyki ruchów Browna na tym poziomie oraz część podanych tu wyników opublikowałem w „Fizyce i Chemii", rok IV, Nr 1, str. 6—13

I. Wyprowadzenie wzoru Einsteina

Rozpatrujemy jednowymiarowy ruch ziarenka pływającego w cieczy (rzut toru na oś X). Przypuśćmy, że pod wpływem przeważających z jednej strony zderzeń ziarnko otrzymało prędkość v_1. Ze względu na opór ośrodka prędkość ta stopniowo zanika. Droga przebyta aż do wyczerpania się prędkości będzie proporcjonalna do szybkości początkowej i masy ziarnka oraz odwrotnie proporcjonalna do współczynnika oporu:

$$x_1 = \frac{m\,v_1}{\beta}\,. \tag{1}$$

Konfiguracje przeważających z jednej strony uderzeń powtórzą się. Załóżmy, że następuje to regularnie w odstępach czasu równych τ. Ziarnko otrzyma więc szybkość v_2 skierowaną tak samo jak v_1, lub przeciwnie i przebiegnie drogę:

$$x_2 = \frac{m\,v_2}{\beta}\,,\ \text{następnie}\ x_3 = \frac{m\,v_3}{\beta}\ \text{itd.}$$

Po n okresach przesunięcie będzie równe:

$$x = x_1 + x_2 + \ldots, + x_n\,. \tag{2}$$

Losy różnych ziarnek są różne; jedne zawracają często (x_i to dodatnie, to ujemne), inne — rzadziej. Prawidłowość ujawni się, gdy weźmiemy wartość średnią dla wielu jednakowych ziarnek. W tym celu podnosimy równanie (2) do kwadratu:

$$x^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + 2x_1x_2 + \ldots$$

Przy tworzeniu wartości średnich podwójne iloczyny znikają, gdyż x_1 np. jest równie często dodatnie, jak ujemnie, więc:

$$\overline{x^2} = \overline{x_1^2} + \overline{x_2^2} + \ldots + \overline{x_n^2}\,.$$

Dla poszczególnego ziarnka x_1 może być duże, x_2 małe, może być także odwrotnie. Gdy jednak weźmiemy pod uwagę wielką liczbę ziarnek i wyliczymy wartość średnią, różnice te zacierają się i

$$\overline{x_1^2} = \overline{x_2^2} = \ldots = \overline{x_n^2}\,.$$

Zatem:

$$\overline{x^2} = n\overline{x_1^2} = \frac{n\, m^2\, \overline{v_1^2}}{\beta^2} \qquad (3)$$

Energia kinetyczna ziarnka na początku pierwszego przedziału czasowego τ wynosi:

$$\frac{m\ v_1^2}{2}\ .$$

Potem szybkość maleje, energia zużywa się na pokonanie oporu. Oznaczamy średnią wartość szybkości w tym przedziale przez u ($u = x_1/\tau$). Piszemy równanie wyrażające zamianę energii kinetycznej na pracę:

$$\frac{m\ v_1^2}{2} = F\ .\ x_1 = \beta u\ .\ u\tau = \beta\tau u^2\ , \qquad (4)$$

gdzie F, określone przez siłę tarcia, położyliśmy równe β u, droga jest iloczynem szybkości średniej i czasu. Dla wielu jednakowych ziarnek lub dla jednego ziarnka startującego wielokrotnie:

$$\frac{m\ \overline{v_1^2}}{2} = \beta\tau\overline{u^2}. \qquad (5)$$

Według prawa ekwipartycji energii:

$$\overline{u^2} = \frac{kT}{m}\ .$$

Po podstawieniu tej wartości do (5) wyliczymy, że

$$m^2\overline{v_1^2} = 2\beta\tau kT\ .$$

Wyrażenie to występuje w (3). Zastępując je otrzymamy:

$$\overline{x^2} = \frac{n\tau 2kT}{\beta}\ ;$$

$n\tau$ przedstawia czas, który upłynął (n przedziałów o długości τ) więc

$$\overline{x^2} = \frac{2kT}{\beta}\ t\ .$$

Jest to właśnie wzór Einsteina. Dla ciałek kulistych $\beta = 6\pi\eta r$, gdzie r jest promieniem ziarnka, η współczynnikiem lepkości.

Jak widać, tym samym sposobem otrzymamy, zastępując drogę przez zakreślony kąt, masę przez moment bezwładności itd., wzór w przypadku ruchu obrotowego.

II. Warunek ograniczający słuszność wzoru

Wzór Einsteina może być tylko wtedy stosowany, gdy porównujemy obserwacje, między którymi upłynął czas dostatecznie długi. Einstein znalazł, że czas ten winien być duży wobec m/β.

By zorientować się, skąd pochodzi ten warunek, dzielimy (jednowymiarową) drogę ziarnka na krótkie odcinki tak, iżby każdy z nich dał się przedstawić jako iloczyn prędkości i czasu, więc np.:

$$s_1 = u\,dt.$$

Biorąc pod uwagę wiele ziarnek jednakowych, mamy:

$$\overline{s_1^2} = \overline{u^2}\,(dt)^2 = \frac{kT}{m}\,(dt)^2.$$

To samo otrzymamy dla następnego odcinka, a zatem dla dowolnego czasu:

$$\overline{s^2} = \frac{kT}{m}\,t^2.$$

Zwrot odcinków, z których składa się droga, będzie różny, to dodatni, to ujemny; ziarnko bowiem zawraca w czasie swej wędrówki. Gdy wielkość określona przez wzór Einsteina dotyczy różnicy między położeniem początkowym i końcowym, s odnosi się do drogi rzeczywistej z uwzględnieniem ruchów wstecznych. Zatem:

$$\overline{s^2} > \overline{x^2},$$

lub
$$\frac{kT}{m}\,t^2 > \frac{2kT}{\beta}\,t\,,$$

i
$$t > \frac{2m}{\beta}\,.$$

Jest to warunek Einsteina w nieco zaostrzonej (co oczywiście jest bez znaczenia) formie.

III. Uwagi uzupełniające

Wzór (1) dotyczy ruchu ciała w ośrodku lepkim. Założenie, że ziarnko wprawione w ruch przez zderzenia jest następnie hamowane w sposób ciągły, stanowi punkt wyjścia zarówno w teorii dawniejszej, jak i współczesnej. Ponieważ problematyka związana z tym punktem, niewątpliwie delikatnym, jest znana [1], ograniczamy się do stwierdzenia, że przedstawienie nasze nie odbiega pod tym względem od wymagań teorii ścisłej. Zauważymy jeszcze, że wielkość (1) można otrzymać całkując równanie ruchu $m\dot{u} = -\beta u$. Dla ciałek, które zwykle obserwujemy w ruchach Browna, wartość m/β jest tak mała (rzędu 10^{-7} do 10^{-8}), że prędkość bardzo szybko spada do zera. Odpowiednio wąskie mogą być granice całkowania.

Że prawo ekwipartycji obejmuje także ciałka Browna na równi z molekułami, przestało być założeniem, odkąd Kapplerowi [2] udało się zaobserwować prawdziwy ruch ciałka makroskopowego poddanego ruchom Browna.

Równanie (4) zawiera przybliżenie: założyliśmy, że siła tarcia jest proporcjonalna do prędkości średniej w danym przedziale, tymczasem chodzi tu o wielkość proporcjonalną do zmieniającej się prędkości. Powstaje pytanie, dlaczego to przybliżenie nie odbija się na wzorze końcowym (który jest ściśle słuszny). Wypiszmy zatem równanie (4) bez owego przybliżenia, rozumiejąc przez u(t) zmienną szybkość w danym przedziale:

$$\frac{m\overline{v_1^2}}{2} = \int_0^\tau \beta u(t) \cdot u(t)\,dt = \beta\tau \left[\frac{1}{\tau} \int_0^\tau u^2(t)\,dt \right].$$

Wyrażenie w nawiasie przedstawia średni kwadrat prędkości w wybranym przedziale. Tok rozumowania wymaga teraz utworzenia średniej z wielkiej liczby przedziałów. Ale to prowadzi do średniego kwadratu prędkości dla całego ruchu, gdyż:

$$\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\tau}\int_0^\tau u^2(t)\,dt + \frac{1}{\tau}\int_\tau^{2\tau} u^2(t)\,dt + \ldots \right] = \frac{1}{n\tau}\int_0^{n\tau} u^2(t)\,dt\,.$$

W rezultacie otrzymujemy więc wzór (5) ze zwykłym znaczeniem symbolu $\overline{u^2}$; możemy zatem stosować prawo ekwipartycji.

W znanej mi literaturze najbardziej zbliżają się (jeśli chodzi o punkt I) do celu, który przyświecał niniejszej pracy, wywód przedstawiony przez G. L. de Haas-Lorentz [3] i publikacja V. Pospisila [4]. Bardzo krótki wywód elementarny wzoru Einsteina podał R. Pohl w pierwszym tomie swej „Einführung", nie otrzymując jednak poprawnego współczynnika.

PIŚMIENNICTWO

1. Por. np. A. K. Timirjazjew — Kineticzeskaja tieorija matierii, 1939, str. 153.
2. E. Kappler — Ann. d. Phys., 31, 377 (1938).
3. G. L. de Haas-Lorentz — Die Brownsche Bewegung, 1913, str. 51—55.
4. V. Pospisil — Phys. Zeitschr., 30, 82 (1929).

РЕЗЮМЕ

Настоящая публикация содержит выведение формулы Эйнштейна на средний квадрат смещения (а также условия ограничивающего применяемость этой формулы) при помощи элементарных математических способов. Независимо от дидактического значения этого вывода, заслуживает некоторого внимания и факт, что получается при этом правильный коэффициент.

ZUSAMMENFASSUNG

Die vorliegende Veröffentlichung enthält eine Ableitung der Einsteinschen Formel für das mittlere Verschiebungsquadrat (und der sie einschränkenden Bedingung) mit elementaren Hilfsmitteln. Dass man dabei den richtigen Zahlenfaktor erhält, mag ein gewisses Interesse verdienen auch abgesehen von der didaktischen Bedeutung einer solchen Ableitung.

Papier druk. sat. 3 kl. 80 g. Format 70 x 100 Ark. druku 6 str.
Annales U. M. C. S. Lublin 1954. Lub. Druk. Prasowa Lublin, ul. Kościuszki 4. Zam. Nr 4493 2.II.1954.
650 egz. A-5-26128 Data otrzymania manuskryptu 2.II.54. Data ukończenia druku 29.III.1954.