ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XVI, 10 SECTIO AA 1961

Z Katedry Fizyki Teoretycznej Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: doc. dr Włodzimierz Urbański

Maksymilian PIŁAT

O rozchodzeniu się fal w falowodach cylindrycznych o przekroju prawie - kołowym

О расхождении волн в цилиндрических волноводах с почти круговым сечением

On the Propagation of the Waves in Cylindrical Wave Guides with the Nearly Circular Cross Section

Rozważania nad zagadnieniem rozchodzenia się fal akustycznych i magnetohydrodynamicznych [1], a także elektromagnetycznych [2] w falowodach cylindrycznych o przekroju prawie kołowym prowadzą do następującego równania:

$$(\triangle_2 + \lambda^2)\, w = 0 \tag{1}$$

z warunkiem brzegowym:

$$w \Big|_{C_0} = 0 \qquad (2^a) \qquad \text{lub} \qquad \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{C_0} = 0 \qquad (3^a)$$

gdzie C_o jest okręgiem.

Wzory na takie wielkości mechaniczne, jak liczba falowa, prędkość grupowa i fazowa, ciśnienie, a także natężenie pola elektrycznego i pola magnetycznego wyrażają się przez funkcje własne i wartości własne równania (1) przy warunku (2^a) lub (3^a), w zależności od rodzaju ścian falowodu [1, 2].

Interesujący jest problem, jak zmienią się te wielkości, gdy przekrój falowodu ulegnie nieznacznemu odkształceniu, zwłaszcza dla fali podstawowej odpowiadającej najmniejszej dodatniej wartości parametru λ_o.

Zagadnienie to sprowadza się do poszukiwania podstawowego rozwiązania równania (1) z warunkiem:

$$w\Big|_C = 0 \quad \ldots (2), \text{ lub } \quad \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_C = 0 \quad \ldots (3),$$

gdzie krzywa C ma równanie: $r = 1 + \varrho(\varphi)$, przy czym $|\varrho(\varphi)| \ll 1$ oraz $\left|\frac{\partial \varrho}{\partial \varphi}\right| \ll 1$. Dla prostoty przyjmuję promień falowodu nieodkształconego równy jedności.

Równanie (1) z warunkiem (2) rozpatrywał w związku z drganiem membrany o brzegu prawie kołowym Lord Rayleigh [3, 4] i otrzymał następujące wyniki:

Niech a_i, b_i oznaczają współczynniki Fouriera funkcji $\varrho(\varphi)$, tj. $\varrho(\varphi) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$, wówczas dla rozwiązania podstawowego z dokładnością do małych rzędu drugiego zachodzi wzór:

$$\lambda_0 = j\,[1 - a_0 + a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (a_n^2 + b_n^2)\,]$$

gdzie j jest najmniejszym dodatnim pierwiastkiem równania $J_0(x) = 0$, $j = 2{,}4048\ldots$, a współczynniki α_n wyrażają się wzorami: $\alpha_n = 1 + \frac{2jJ_n'(j)}{J_n(j)}$

i spełniają nierówności: $2n + 1 > \alpha_n \geqslant 2n - 3$. $J_n(x)$ są funkcjami Bessela rzędu n. Przybliżona funkcja własna $w(r, \varphi)$ jest dana wzorem:

$$w = w(r, \varphi) = J_0(\lambda_0 r) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\lambda_0 r)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$

gdzie $A_n = -2j\frac{J_0'(j)}{J_n(j)}\,a_n$, $\quad B_n = -2j\frac{J_0'(j)}{J_n(j)}\,b_n$.

Niżej podaję rozwiązania (1) z warunkiem 3). Rozwiązaniem równania (1) z warunkiem (3ª) jest $J_n(\lambda r)\,e^{in\varphi}$, n jest liczbą całkowitą, a $J_n(x)$ są funkcjami Bessela rzędu n. Pierwszą funkcją własną zagadnienia jest $w = J_0(kr)$, gdzie k jest najmniejszym pierwiastkiem równania $J'_0(x) - 0$, $k = 3{,}8317\ldots$.

Dla obszaru $r(\varphi) \leqslant 1 + \varrho(\varphi)$ szukam rozwiązania w postaci:

$$w = w(r, \varphi) = J_0(\lambda r) - p(\lambda r, \varphi) - q(\lambda r, \varphi) \tag{4}$$

gdzie:

$$p(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(r)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

$$q(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(r)(A_n' \cos n\varphi + B_n' \sin n\varphi)$$

$$\lambda = k + l + l' \tag{6}$$

przy czym A_n, B_n i l są małymi rzędu pierwszego, a A'_n, B'_n oraz l' małymi rzędu drugiego. $\varrho(\varphi)$ jest małą rzędu pierwszego. Kładąc $r(\varphi) = 1 + \varrho(\varphi)$ i korzystając z warunku brzegowego otrzymuję, z dokładnością do małych rzędu drugiego, następujące równości:

$$\lambda r = k + (l + k\varrho) + (l' + l\varrho) \tag{7}$$

$$\begin{gathered} J'_0(k) + (l + k\rho + l' + l\rho) J''_0(k) + 1/2 (l + k\rho)^2 J'''_0(k) + \\ - p_r(k,\varphi) - (l + k\varrho) p_{rr}(k,\varphi) - q_r(k,\varphi) = 0 \end{gathered} \tag{8}$$

Wyrazy rzędu pierwszego dają równanie:

$$(l + k\rho) J_0''(k) - p_r(k,\varphi) = 0 \tag{9}$$

lub po rozpisaniu:

$$\begin{gathered} lJ_0''(k) + kJ_0''(k)\left[a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)\right] + \\ - \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = 0 \end{gathered} \tag{9'}$$

Stąd oraz z równości

$$J_0''(k) = -J_0(k) \tag{10}$$

otrzymuję następujące wzory:

$$l = -a_0 k \tag{11}$$

$$A_n = -2k\frac{J_0(k)}{J_n'(k)}a_n, \; B_n = -2k\frac{J_0(k)}{J_n'(k)}b_n \tag{12}$$

Wyrazy rzędu drugiego dają związek następujący:

$$(l' + l\rho)J_0''(k) + 1/2(l + k\rho)^2 J_0'''(k) - (l + k\rho)p_{rr}(k,\varphi) - q_r(k,\varphi) = 0 \tag{13}$$

Całkując (13) po φ w granicach od 0 do 2π i uwzględniając (11) oraz równości:

$$\frac{J_0'''(k)}{J_0''(k)} = -\frac{1}{k}, \qquad k\frac{J_n''(k)}{J_n'(k)} = -1 - k\left(1 - \frac{n^2}{k^2}\right)\frac{J_n(k)}{J_n'(k)} \tag{14}$$

wynikające z równania Bessela, otrzymuję wyrażenie na l':

$$l' = k\left[a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (a_n^2 + b_n^2)\right], \tag{15}$$

gdzie
$$\alpha_n = -1 + 2\,(n^2 - k^2)\,\frac{J_n(k)}{kJ_n'(k)} \tag{16}$$

Pierwsze trzy współczynniki α_n obliczam korzystając ze związku:

$$J_1(k) = -J'_0(k) = 0 \tag{17}$$

oraz w oparciu o wzory rekurencyjne dla funkcji Bessela. Otrzymuję:

$$\alpha_1 = -1,\ \alpha_2 = k^2 - 5 \approx 9{,}68...,\ \alpha_3 = \frac{9k^2 - 84}{12 - k^2} \approx -17{,}95...$$

Natomiast dla $n \geqslant 4$ otrzymuje następujące oszacowanie:

$$\frac{2}{n - c}(n^2 - k^2) - 1 \geqslant \alpha_n > \frac{2}{n}(n^2 - k^2) - 1, \tag{18}$$

$$\text{gdzie } c = 12\,\frac{16 - k^2}{24 - k^2} \approx 1{,}7.$$

Dowód nierówności (18) jest następujący:

Niech $j_{n1} < j_{n2} < j_{n3} < \ \dots\ < j_{n\nu} < \ \dots$ oznaczają dodatnie pierwiastki równania $J_n(x) = 0$. Pochodną logarytmiczną funkcji $J_n(x)$ można zapisać w sposób następujący [5]:

$$\frac{J_n'(x)}{J_n(x)} = \frac{n}{x} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{-2x}{j_{n\nu}^2 - x^2} \tag{19}$$

Ze wzoru (17) widać, że k jest najmniejszym pierwiastkiem równania $J_1(x) = 0$, zatem dla $n \geqslant 4$ słuszny jest związek:

$$\frac{kJ_n'(k)}{J_n(k)} = n - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2k^2}{j_{n\nu}^2 - k^2} \tag{20}$$

$j_{n\nu}$ wzrastają z n przy ustalonym ν, zatem wszystkie wyrazy ostatniej sumy są dodatnie, ponato przy wzrastającym n wyrazy te maleją,, więc słuszne są nierówności:

$$n > k\,\frac{J_n'(k)}{J_n(k)} > n - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2k^2}{j_{4\nu}^2 - k^2} = n - c \tag{21}$$

$$\text{Sumę } c = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2k^2}{j_{4\nu}^2 - k^2} = 4 - k\,\frac{J_4'(k)}{J_4(k)} = 12\,\frac{16 - k^2}{24 - k^2}$$

obliczam korzystając ze wzorów rekurencyjnych dla funkcji Bessela. Z (16) i (21) wynikają nierówności (18).

Z (18) wynika również następujące proste, ale mniej dokładne oszacowanie:

$$2n + 3 \rangle \alpha_n \rangle 2n - 9.$$

Wyniki te łącznie z wyżej omówionym rozwiązaniem równania (1) przy warunku (2) dają rozwiązanie postawionego problemu.

PIŚMIENNICTWO

1. Gajewski R.: Phys. Fluids 2, 633 (1959).
2. Landau L., Lifszic E.: Elektrodynamika ośrodków ciągłych, PWN, Warszawa 1960.
3. Lord Rayleigh: The Theory of Sound. London 1894/96.
4. Polya G., Szego G.: Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics. Princeton University Press 1951.
5. Watson G. N.: A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge 1948.

РЕЗЮМЕ

Проблема определить поле электромагнитное, скоростное и некоторое магнитно-звуковое в соответственных волноводах сводится к нахождению решений двухмерного волнового уравнения:

$$\Delta_2 w + \lambda^2 w = 0, \qquad (1)$$

при краевых условиях:

$$w = 0, \qquad (2)$$

$$\text{или} \qquad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \qquad (3)$$

В этой работе рассматриваются волноводы с поперечным сечением, мало отличающиеся от круга. Автор дает основное решение уравнения (1) при условии (3), что совместно с решением при условии (2), которое дано Релеем, делает возможным определение этих полей, свойственных основным волнам в волноводах.

Papier druk. sat. III kl. 80 g. Format 70×100 Druku str. 6
Annales UMCS Lublin 1962 Lub. Druk. Pras. Lublin, Unicka 4 Zam. 2852 14.VIII.63.
600 + 75 odbitek N-5 Manuskrypt otrzymano 17.VIII.63 Druk ukończono 31.I.64

SUMMARY

The determination of the electromagnetic, velocity and magneto-acustic fields in suitable wave guides requires the solution of the two-dimensional wave equation:

(1) $\triangle_2 w + \lambda^2 w = 0$

with the following boundary condition

(2) $w = 0$ or (3) $\dfrac{\partial w}{\partial n} = 0.$

In this paper the wave guides of a nearly circular cross section are investigated. The principal solution of the equation (1) with the additional condition (3) was found. This solution together with the Rayleigh's solution of the equation (1) with the condition (2) makes it possible to determine the mentioned fields in the suitable wave guides for the principal waves.