ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA

VOL. XV, 10 SECTIO AA 1960

Z Katedry Fizyki Teoretycznej Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: doc. dr Włodzimierz Urbański

Maksymilian PIŁAT

Drgania wielowarstwowej ciekłej kuli z rdzeniem

Колебания многослойного жидкого шара с твердым сердечником

The Oscillations of the Many-Layered Liquid Sphere with a Core

§ 1. Teorię małych drgań grawitacyjnych kropli nieściśliwej cieczy idealnej podał Lord Kelvin [1]. Lamb uogólnił te wyniki na przypadek jednej warstwy cieczy pokrywającej sztywny rdzeń sferyczny [1]. Lord Rayleigh opracował teorię drgań kapilarnych kropli takiej cieczy. W teorii jądra atomowego u podstaw modelu kroplowego [3], a także uogólnionego tzw. kolektywnego, rozpatruje się drgania kropli cieczy idealnej i nieściśliwej o stałym rozkładzie gęstości masy i gęstości ładunku tj. $\rho = \text{const.}$, $q = \text{const.}$, gdzie ρ oznacza gęstość masy, q — gęstość objętościową ładunku elektrycznego. Uwzględnia się przy tym napięcie powierzchniowe kropli obliczone z energii wiązania jądra.

Celem mojej pracy jest uogólnienie wspomnianych wyżej wyników na następujące przypadki:

1) drgań n warstw różnych nieściśliwych cieczy idealnych, naładowanych elektrycznie z różnymi gęstościami objętościowymi, koncentrycznie pokrywających sztywny rdzeń sferyczny,

2) drgań kropli cieczy o ciągłym rozkładzie gęstości masy i gęstości ładunku.

W przypadku pierwszym częstości własne drgań dane są wzorem:

$$\omega_\lambda^2 = \frac{C_\lambda}{\mathcal{B}_\lambda}$$

gdzie:

$$C_\lambda = C_\lambda^{(1)} + C_\lambda^{(2)}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_\lambda^{(1)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{4\pi R_o^{2\lambda+6} (R_k^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1})(q_{k+1} - q_k)}{(2\lambda+1)(R_o^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1})^2} \Bigg\{ \sum_{i=0}^{k} \Bigg[1 & \\
- \left(\frac{R_n}{R_i}\right)^{2\lambda+1} \Bigg] (q_{i+1} - q_i) + \frac{1}{R_k^{2\lambda+1}} \sum_{i=k+1}^{n} (q_{i+1} - q_i)(R_i^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1}) \Bigg\} + & \\
- \sum_{k=0}^{n} \frac{4\pi (R_k^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1}) R_o^{2\lambda+6} (q_{k+1} - q_k)}{3(R_o^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1}) R_k^{2\lambda+4}} \sum_{i=k}^{n} (R_i^3 - R_{i+1}^3)\, q_{i+1} &
\end{aligned}
$$

$$
\mathcal{C}_\lambda^{(2)} = (\lambda - 1)(\lambda + 2) \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k R_k^2 \left(\frac{R_k^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1}}{R_o^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1}} \right)^2 \left(\frac{R_o}{R_k} \right)^{2\lambda+6}
$$

$$
\mathcal{B}_\lambda = \frac{R_o^{2\lambda+6}}{\lambda (R_o^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1})^2} \sum_{k=1}^{n} \rho_k \left[R_{k-1}^{2\lambda+1} - R_k^{2\lambda+1} - \frac{\lambda}{\lambda+1} R_n^{4\lambda+2} \left(\frac{1}{R_{k-1}^{2\lambda+1}} - \frac{1}{R_k^{2\lambda+1}} \right) \right]
$$

Ze wzorów tych otrzymuję jako przypadki szczególne wyniki podane przez Lorda Kelvina i Lamba [1] oraz wzór na częstości własne drgań kropli pokrytej warstwą innej cieczy.

W przypadku drugim wzór na częstości własne otrzymuję z wyżej wypisanych wzorów przez przejście graniczne, gdy liczba warstw rośnie nieograniczenie.

§ 2. Rozpatrzmy drgania swobodne n warstw cieczy idealnych i nieściśliwych, koncentrycznie pokrywających sztywny rdzeń sferyczny. Niech $R_o, R_1, \ldots, R_n$ oznaczają promienie powierzchni tych warstw przed odkształceniem w kolejności licząc od warstwy zewnętrznej do rdzenia. Po odkształceniu powierzchnie warstw dane bębą równaniami $r_k = r_k\ (\vartheta, \varphi)$. Przyrosty $\Delta r_k = r_k - R_k$ rozwijam w szereg funkcji kulistych $Y_{\lambda\mu}\ (\vartheta, \varphi)$:

$$
r_k = R_k \left[1 + \sum \alpha_{\lambda\mu}^{(k)} Y_{\lambda\mu} (\vartheta, \varphi) \right] \tag{2,1}
$$

gdzie $\alpha_{\lambda\mu}^{(k)} = \alpha_{\lambda\mu}^{(k)}\ (t)$ są współczynnikami zależnymi od czasu, a sumowanie rozciąga się po μ od $-\lambda$ do $+\lambda$, i po λ od 0 do ∞, $k = 0, 1, \ldots, n$. Oczywiście $r_n = R_n$ i $\alpha_{\lambda\mu}^{(n)} = 0$.

Zakładamy, że ruch cieczy jest bezwirowy, co łącznie z warunkiem nieściśliwości daje równanie dla potencjału prędkości Φ_k:

$$
\nabla^2 \Phi_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.
$$

Rozwiązaniem tego równania jest

$$\Phi_k = \sum_{\lambda\mu} \left(A^{(k)}_{\lambda\mu} r_\lambda + \frac{B^{(k)}_{\lambda\mu}}{r^{\lambda+1}} \right) Y_{\lambda\mu}(\vartheta, \varphi) \text{ dla } R_k \leqslant r \leqslant R_{k-1} \tag{2, 2}$$

Potencjał Φ_k musi spełniać następujące warunki:

W1) Φ_k jest ciągły w cieczy.

W2) $v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$ jest ciągła w cieczy.

W3) $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r = R_k} = \dot{r}_k$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

W3[a]) $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r = R_n} = 0.$

Z W1 i W2 wynika dla $k = 1, 2, \ldots, n-1$:

$$(A^{(k)}_{\lambda\mu} - A^{(k+1)}_{\lambda\mu}) R_k^{2\lambda+1} = B^{(k+1)}_{\lambda\mu} - B^{(k)}_{\lambda\mu} \text{ dla } k = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{2, 3}$$

oraz:

$$(A^{(k)}_{\lambda\mu} - A^{(k+1)}_{\lambda\mu}) \frac{\lambda}{\lambda+1} R_k^{2\lambda+1} = B^{(k)}_{\lambda\mu} - B^{(k+1)}_{\lambda\mu} \text{ dla } k = 1, \ldots, n-1 \tag{2, 4}$$

i stąd:

$$A^{(k)}_{\lambda\mu} = A^{(k+1)}_{\lambda\mu} = A_{\lambda\mu}, \; B^{(k)}_{\lambda\mu} = B^{(k+1)}_{\lambda\mu} = B_{\lambda\mu}.$$

Z warunku W3[a] wynika:

$$B_{\lambda\mu} = A_{\lambda\mu} \frac{\lambda}{\lambda+1} R_n^{2\lambda+1} \tag{2, 5}$$

Z W3 mamy dla $k = 0$:

$$\lambda A_{\lambda\mu} R_o^{2\lambda+1} - (\lambda+1) B_{\lambda\mu} = R_o^{\lambda+3} \dot{\alpha}^{(o)}_{\lambda\mu} \tag{2, 6}$$

Łącząc wzory (2, 5) i (2, 6) otrzymuję:

$$A_{\lambda\mu} = \frac{R_o}{\lambda (R_o^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1})} \dot{\alpha}^{(o)}_{\lambda\mu} \tag{2, 7}$$

$$B_{\lambda\mu} = \frac{R_o^{\lambda+3} R_n^{2\lambda+1}}{(\lambda+1)(R_o^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1})} \dot{\alpha}^{(o)}_{\lambda\mu} \tag{2, 8}$$

Z W3 i wzory (2, 5) wynika:

$$A_{\lambda\mu} = \frac{R_k^{\lambda+3}}{\lambda (R_k^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1})} \dot{\alpha}^{(k)}_{\lambda\mu} \text{ dla } k = 1, \ldots, n \tag{2, 9}$$

następnie ze wzorów (2, 7) oraz (2, 9) otrzymuję:

$$\dot{\alpha}^{(k)}_{\lambda\mu} = \frac{R_k^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1}}{R_o^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1}} \left(\frac{R_o}{R_k} \right)^{\lambda+3} \dot{\alpha}^{(o)}_{\lambda\mu} \tag{2,10}$$

Po scałkowaniu wzoru (2, 10) otrzymuję:

$$\alpha^{(k)}_{\lambda\mu} = \frac{R_k^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1}}{R_o^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1}} \left(\frac{R_o}{R_k} \right)^{\lambda+3} \alpha^{(o)}_{\lambda\mu} + c^{(k)} \tag{2,11}$$

gdzie $c^{(k)}$ są stałymi określającymi początkowe odkształcenia powierzchni warstw. W rozpatrywanym przeze mnie przypadku $c^{(k)} = 0$.

§ 3. Energię kinetyczną obliczam ze wzoru:

$$T = \sum_{k=1}^{n} \rho_k \int_{R_k}^{R_{k-1}} \frac{|\operatorname{grad} \Phi|^2}{2} d\tau \tag{3,1}$$

ρ_k jest gęstością cieczy w warstwie k.

Wyrażając grad Φ we współrzędnych biegunowych otrzymuję wzór:

$$|\operatorname{grad} \Phi|^2 = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \Phi^*}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \Phi^*}{\partial \varphi} \tag{3,2}$$

Po obliczeniu $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}$ i $\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$ ze wzoru (2, 2) i wstawianiu do (3,2) otrzymuję:

$$\begin{aligned} |\operatorname{grad} \Phi|^2 = \sum_{\substack{\lambda\lambda' \\ \mu\mu'}} \Bigg\{ & \left[\lambda A_{\lambda\mu} r^{\lambda-1} - (\lambda+1) \frac{B_{\lambda\mu}}{r^{\lambda+2}} \right] \cdot \Bigg[\lambda' A^*_{\lambda'\mu'} r^{\lambda'-1} + \\ & - (\lambda'+1) \frac{B^*_{\lambda'\mu'}}{r^{\lambda'+2}} Y_{\lambda\mu} Y^*_{\lambda'\mu'} + \left(A_{\lambda\mu} r^{\lambda-1} + \frac{B_{\lambda\mu}}{r^{\lambda+2}} \right) \Bigg(A^*_{\lambda'\mu'} r^{\lambda'-1} + \\ & \frac{B^*_{\lambda'\mu'}}{r^{\lambda'+1}} \Bigg) \left(\frac{\partial Y_{\lambda\mu}}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial Y^*_{\lambda'\mu'}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial Y_{\lambda\mu}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial Y^*_{\lambda'\mu'}}{\partial \varphi} \right) \Bigg] \Bigg\} \end{aligned} \tag{3,3}$$

Pamiętając, że $\int Y_{\lambda\mu} Y^*_{\lambda'\mu'} d\Omega = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'}$ oraz

$$\int \left(\frac{\partial Y_{\lambda\mu}}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial Y^*_{\lambda'\mu'}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial Y_{\lambda\mu}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial Y^*_{\lambda'\mu'}}{\partial \varphi} \right) d\Omega = \lambda(\lambda+1) \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'} \qquad [2]$$

obliczam z (3, 1) i (3, 3):

$$T=\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho_k}{2}\sum_{\lambda\mu}\int\limits_{R_k}^{R_{k-1}}\left\{\lambda(2\lambda+1)|A_{\lambda\mu}|^2 r^{2\lambda}+(\lambda+1)(2\lambda+1)\frac{|B_{\lambda\mu}|^2}{r^{2\lambda+2}}\right\}dr=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho_k}{2}\sum_{\lambda\mu}\left\{\lambda|A_{\lambda\mu}|^2(R_{k-1}^{2\lambda+1}-R_k^{2\lambda+1})-(\lambda+1)|B_{\lambda\mu}|^2\left(\frac{1}{R_{k-1}^{2\lambda+1}}-\frac{1}{R_k^{2\lambda+1}}\right)\right\}$$

Po wstawieniu do powyższego wzoru $A_{\lambda\mu}$ i $B_{\lambda\mu}$ ze wzorów (2, 7) i (2, 8) i po prostych przekształceniach otrzymuję:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{\lambda\mu}\mathcal{B}_\lambda\left|\dot{\alpha}_{\lambda\mu}^{(o)}\right|^2 \tag{3, 4}$$

gdzie $$\mathcal{B}_\lambda=\frac{R_o^{2\lambda+6}}{\lambda(R_o^{2\lambda+1}-R_n^{2\lambda+1})^2}\sum_{k=1}^{n}\rho_k\left[R_{k-1}^{2\lambda+1}-R_k^{2\lambda+1}+\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda}{\lambda+1}R_n^{4\lambda+2}\left(\frac{1}{R_{k-1}^{2\lambda+1}}-\frac{1}{R_k^{2\lambda+1}}\right)\right] \tag{3, 5}$$

§ 4. Zmianę potencjału elektrostatycznego $\delta\varphi$ związanego z odkształceniem warstw naładowanej cieczy obliczam, traktując przemieszczenie ładunków w pobliżu powierzchni jako wytworzenie warstw powierzchniowych równych $(q_{k+1}-q_k)\,\Delta r_k$. $\delta\varphi$ spełnia równanie Laplace'a, można je więc zapisać w postaci:

$$\delta\varphi_k=\sum_{\lambda\mu}\left(Q_{\lambda\mu}^{(k)}r^\lambda+\overline{Q}_{\lambda\mu}^{(k)}\frac{1}{r^{\lambda+1}}\right)Y_{\lambda\mu} \tag{4, 1}$$

dla $R_k\leqslant r\leqslant R_{k-1}$, gdzie $k=0, 1, \ldots, n+1$, $R_{n+1}=0$, $R_1=\infty$, $Q_{\lambda\mu}^{(k)}$, $\overline{Q}_{\lambda\mu}^{(k)}$ są współczynnikami zależnymi od czasu.

$\delta\varphi$ musi spełniać następujące warunki:

W4) $\delta\varphi$ jest skończony dla $r=0$ i $\lim\limits_{r\to\infty}\delta\varphi=0$.

W5) $\delta\varphi$ jest ciągły w całej przestrzeni.

W6) Składowa normalna pola elektrycznego posiada skoki na granicach warstw:

$$\frac{\partial}{\partial r}(\delta\varphi_k)\Big|_{r=R_k}-\frac{\partial}{\partial r}(\delta\varphi_{k+1})\Big|_{r=R_k}=-4\pi(q_{k+1}-q_k)\,\Delta r_k=-4\pi(q_{k+1}-$$

$$-q_k)\,R_k\sum_{\lambda\mu}\alpha_{\lambda\mu}^{(k)}Y_{\lambda\mu}$$

Z warunku W4 wynika, że $Q_{\lambda\mu}^{(o)} = \overline{Q}_{\lambda\mu}^{(n+1)} = 0$ (4, 2)

Z W5 wynika:

$$(Q_{\lambda\mu}^{(k+1)} - Q_{\lambda\mu}^{(k)}) R_k^{2\lambda+1} = \overline{Q}_{\lambda\mu}^{(k)} - \overline{Q}_{\lambda\mu}^{(k+1)} \tag{4, 3}$$

Warunek W6 daje:

$$\lambda (Q_{\lambda\mu}^{(k)} - Q_{\lambda\mu}^{(k+1)}) R_k^{2\lambda+1} - (\lambda+1)(\overline{Q}_{\lambda\mu}^{(k)} - \overline{Q}_{\lambda\mu}^{(k+1)}) = -4\pi (q_{k+1} - q_k) R_k^{\lambda+3} \alpha_{\lambda\mu}^{(k)} \tag{4, 4}$$

Łącząc wzory (4, 3) i (4, 4) otrzymuję:

$$Q_{\lambda\mu}^{(k)} - Q_{\lambda\mu}^{(k+1)} = \frac{-4\pi (q_{k+1} - q_k) R_k^{\lambda+3}}{(2\lambda+1) R_k^{2\lambda+1}} \alpha_{\lambda\mu}^{(k)} \tag{4, 5}$$

Zauważywszy, że $Q_{\lambda\mu}^{(o)} = 0$ otrzymuję z (4, 5):

$$Q_{\lambda\mu}^{(k+1)} = \frac{4\pi}{2\lambda+1} \sum_{i=o}^{k} \frac{q_{i+1} - q_i}{R_i^{\lambda-2}} \alpha_{\lambda\mu}^{(i)} \tag{4, 6}$$

Wstawiając $\alpha_{\lambda\mu}^{(i)}$ z (2, 11) do (4, 6) otrzymuję:

$$Q_{\lambda\mu}^{(k+1)} = \frac{4\pi R_o^{\lambda+3} \alpha_{\lambda\mu}^{(o)}}{(2\lambda+1)(R_o^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1})} \sum_{i=o}^{k} \left[1 - \left(\frac{R_n}{R_i} \right)^{2\lambda+1} \right] (q_{i+1} - q_i) \tag{4, 7}$$

gdzie $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $q_o = 0$.

Warto zauważyć, że $Q_{\lambda\mu}^{(n+1)} = Q_{\lambda\mu}^{(n)}$.

Ze wzorów (4, 3) i (4, 4) wynika, że:

$$\overline{Q}_{\lambda\mu}^{(k)} - \overline{Q}_{\lambda\mu}^{(k+1)} = (Q_{\lambda\mu}^{(k+1)} - Q_{\lambda\mu}^{(k)}) R_k^{2\lambda+1} = \frac{4\pi (q_{k+1} - q_k) R_k^{\lambda+3}}{(2\lambda+1)} \alpha_{\lambda\mu}^{(k)} \tag{4, 8}$$

i ponieważ $\overline{Q}_{\lambda\mu}^{(n+1)} = 0$ otrzymujemy:

$$\overline{Q}_{\lambda\mu}^{(k)} = \frac{4\pi}{2\lambda+1} \sum_{i=k}^{n} (q_{i+1} - q_i) R_i^{\lambda+3} \alpha_{\lambda\mu}^{(i)} \tag{4, 9}$$

Wstawiając do (4, 9) $\alpha_{\lambda\mu}^{(i)}$ ze wzoru (2, 11) otrzymuję:

$$\overline{Q}_{\lambda\mu}^{(k)} = \frac{4\pi R_o^{\lambda+3} R_n^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)(R_o^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1})} \sum_{i=k}^{n} (q_{i+1} - q_i) \left[\left(\frac{R_i}{R_n} \right)^{2\lambda+1} - 1 \right] \alpha_{\lambda\mu}^{(o)} \tag{4,10}$$

§ 5. Zmianę elektrostatycznej energii kropli przy deformacji jej kształtu można przedstawić w następującej postaci:

$$\Delta E_{el} = \frac{1}{2}\int q_k \,\Delta\varphi\, d\tau + \frac{1}{2}\int \varphi\cdot\Delta q^* \,d\tau + \frac{1}{2}\int \Delta\varphi\cdot\Delta q^*\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\int q_k\,\Delta\varphi_k\, d\tau + \frac{1}{2}\sum_{k=o}^{n-1}\int \varphi\cdot\Delta q_k^*\, d\tau + \frac{1}{2}\sum_{k=o}^{n-1}\Delta\varphi_{k+1}\cdot\Delta q_k^*\, d\tau \quad (5,1)$$

gdzie $\Delta q_k = q_k\,\Delta r_k\,\delta(r - R_k)$, przy czym $\int \Delta q_k\, d\tau = 0$ (5, 2)

Korzystając ze wzorów (2, 1), (2, 11), (4, 1), (4, 7), (4, 10) i (5, 2) otrzymuję w rozpatrywanym przybliżeniu, że:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\int q_k\cdot\Delta\varphi_k\, d\tau = 0 \quad (5,3)$$

oraz $$\frac{1}{2}\int \Delta\varphi\cdot\Delta\, q d\tau = \frac{1}{2}\sum_{\lambda\mu}\sum_{k=o}^{n-1}\left\{\frac{4\pi R_o^{2\lambda+6}(R_k^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1})(q_{k+1} - q_k)}{(2\lambda+1)(R_o^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1})^2}\times\right.$$

$$\times\left[\sum_{i=o}^{k}\left(1 - \left(\frac{R_i}{R_n}\right)^{2\lambda+1}\right)(q_{i+1} - q_i) + \frac{1}{R_k^{2\lambda+1}}\sum_{i=k+1}^{n}(q_{i+1} - q_i)(R_i^{2\lambda+1} - \right.$$

$$\left.\left. - R_n^{2\lambda+1})\right]\left|\alpha_{\lambda\mu}^{(o)}\right|^2\right\}$$

W celu obliczenia całki $\frac{1}{2}\int \varphi\cdot\Delta q^*\, d\tau$ przedstawiam potencjał φ_{k+1} w cienkiej powierzchniowej warstwie (gdzie $\Delta q_k \neq 0$) wzorem przybliżonym:

$$\varphi_{k+1} = \frac{\sum_{i=k}^{n} 4/3\pi(R_i^3 - R_{i+1}^3)\, q_{i+1}}{R_k + \Delta r_k} \approx \frac{\sum_{i=k}^{n} 4/3\,\pi q_{i+1}(R_i^3 - R_{i+1}^3)}{R_k}\left(1 - \sum_{\lambda\mu}\alpha_{\lambda\mu}^{(k)} Y_{\lambda\mu}\right)$$

przy czym $R_{n+1} = 0$. Z powyższego wzoru oraz ze wzorów (2, 1), (21, 1) i (5, 2) otrzymuję:

$$\frac{1}{2}\int \varphi\Delta q^*\, d\tau = -\sum_{\lambda\mu}\left[\sum_{k=o}^{n}\frac{4\pi(R_k^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1})^2 R_o^{2\lambda+1}(q_{k+1} - q_k)}{3(R_o^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1})^2 R_k^{2\lambda+4}}\sum_{i=k}^{n}(R_i^3 - \right.$$

$$\left. - R_{i+1}^3)\, q_{i+1}\right]\cdot\left|\alpha_{\lambda\mu}^{(o)}\right|^2 \quad (5,5)$$

Zatem zmiana energii elektrostatycznej wyraża się wzorem:

$$\Delta E_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} C_\lambda^{(1)} \left| \alpha_{\lambda\mu}^{(o)} \right|^2 \tag{5, 6}$$

gdzie:

$$C_\lambda^{(1)} = \sum_{k=o}^{n} \frac{4\pi R_o^{2\lambda+1} (R_k^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1})(q_{k+1} - q_k)}{(2\lambda+1)(R_o^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1})^2} \left\{ \sum_{i=o}^{k} \left[1 - \left(\frac{R_n}{R_i} \right)^{2\lambda+1} \right] (q_{i+1} - q_i) + \frac{1}{R_k^{2\lambda+1}} \sum_{i=k+1}^{n} (q_{i+1} - q_i)(R_i^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1}) \right\} + $$

$$- \sum_{k=o}^{n} \frac{4\pi (R_k^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1})^2 R_o^{2\lambda+6} (q_{k+1} - q_k)}{3 (R_o^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1}) R_k^{2\lambda+4}} \sum_{i=k}^{n} (R_i^3 - R_{i+1}^3) q_{i+1} \tag{5, 7}$$

§ 6. Zmianę energii powierzchniowej przy odkształceniu kropli daje wzór [3]:

$$\Delta E_{\mathrm{pow}} = \sum_{\lambda\mu} \frac{\sigma R^2}{2} (\lambda - 1)(\lambda + 2) \left| \alpha_{\lambda\mu} \right|^2 \tag{6, 1}$$

gdzie σ oznacza stałą napięcia powierzchniowego, a R promień kropli nie odkształconej.

Dla n warstw analogiczny wzór będzie:

$$\Delta E_{\mathrm{pow}} = \sum_{k=o}^{n-1} \sum_{\lambda\mu} \frac{\sigma_k R_k}{2} (\lambda - 1)(\lambda + 2) \left| \alpha_{\lambda\mu}^{(k)} \right|^2 \tag{6, 1}$$

wstawiając następnie $\alpha_{\lambda\mu}^{(k)}$ ze wzoru (2, 11) do (6, 1) otrzymuję:

$$\Delta E_{\mathrm{pow}} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} C_\lambda^{(2)} \left| \alpha_{\lambda\mu}^{(o)} \right|^2 \tag{6, 2}$$

gdzie:

$$C_\lambda^{(2)} = (\lambda - 1)(\lambda + 2) \sum_{k=o}^{n-1} \sigma_k \cdot R_k^2 \left(\frac{R_k^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1}}{R_o^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1}} \right)^2 \left(\frac{R_o}{R_k} \right)^{2\lambda+6} \tag{6, 3}$$

§ 7. Całkowita energia drgań wyrazi się wzorem:

$$\Delta E = \sum_{\lambda\mu} \left(\frac{\mathcal{B}_\lambda}{2} \left| \dot{\alpha}_{\lambda\mu}^{(o)} \right|^2 + \frac{C_\lambda}{2} \left| \alpha_{\lambda\mu}^{(o)} \right|^2 \right) \tag{7, 1}$$

gdzie $C_\lambda = C_\lambda^{(1)} + C_\lambda^{(2)}$ (7, 2)

Częstości własne drgań tej wielowarstwowej kropli dane są wzorem:

$$\omega_\lambda^2 = \frac{C_\lambda}{\mathcal{B}_\lambda} \tag{7, 3}$$

§ 8. Przypadki szczególne:

1. Kropla cieczy jednorodnej. Kładąc $n = 1$. $R_n = R_1 = 0$ otrzymamy ze wzorów przeze mnie wyprowadzonych wzory na częstości własne drgań swobodnych kropli cieczy stosowany w teorii jądra atomowego (3):

$$C_\lambda = \sigma R_o^2 (\lambda - 1)(\lambda + 2) - \frac{8\pi q^2 (\lambda - 1)}{3R_o (2\lambda + 1)} \qquad \mathcal{B}_\lambda = \frac{\rho R_o^5}{\lambda}$$

2. Jedna warstwa cieczy na rdzeniu stałym. Kładąc we wzorach wyprowadzonych w tej pracy $n = 1$, $R_o = a$, $R_n = R_1 = b$, $q^2 = -G\rho^2$ i oznaczając przez ρ_o średnią gęstość rdzenia i warstwy cieczy oraz $g = 4/3\pi G \rho_o a$, otrzymujemy po prostych przekształceniach:

$$\omega_\lambda^2 = \frac{\lambda(\lambda+1)\left[\left(\frac{a}{b}\right)^\lambda - \left(\frac{b}{a}\right)^{\lambda+1}\right]}{(\lambda+1)\left(\frac{a}{b}\right)^\lambda + \lambda\left(\frac{b}{a}\right)^{\lambda+1}}\left(1 - \frac{3}{2\lambda+1}\cdot\frac{\rho}{\rho_o}\right)\frac{g}{a}$$

Wzór ten jest indentyczny ze wzorem podanym przez L a m b a [1].

3. Kropla pokryta warstwą innej cieczy. Kładąc we wzorach (3, 5), (6, 3) i (5, 7) $n = 2$, $R_n = R_2 = 0$ otrzymamy wzór na częstości drgań kropli pokrytej jedną warstwą innej cieczy:

$$\omega_\lambda^2 = \frac{C_\lambda}{\mathcal{B}_\lambda}, \text{ gdzie } C_\lambda = C_\lambda^{(1)} + C_\lambda^{(2)}$$

$$C_\lambda^{(1)} = -\frac{8\pi a^5 (\lambda - 1)}{3(2\lambda + 1)}(q_1^2 - q_1 q_2 + q_2^2) + 4\pi a^5 q_1 - q_2)\left[\frac{1}{2\lambda+1}\left(\frac{b}{a}\right)^{2\lambda+1} - \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3\right]$$

$$C_\lambda^{(2)} = (\lambda - 1)(\lambda + 2)a^2\left[\sigma_o + \sigma_1\left(\frac{a}{b}\right)^3\right]$$

$$\mathcal{B}_\lambda = \frac{a^5}{\lambda}\left[\rho_1 - (\rho_2 - \rho_1)\left(\frac{b}{a}\right)^{2\lambda+1}\right]$$

a i b są jak poprzednio promieniami warstw, tzn. $R_o = a$, $R_1 = b$.

§ 9. W celu obliczenia częstości drgań ciekłej kuli o promieniu a z ciągłym rozkładem gęstości masy $\rho = \rho(r)$ i gęstości ładunku $q = q(r)$ zawierającej sztywny rdzeń sferyczny o promieniu b przechodzę we wzorach (3, 5) i (5, 7) z n do nieskończoności przy ustalonych $R_o = a$ i $R_n = b$.

Uwzględniam przy tym skoki gęstości na powierzchniach cieczy $r = a$ oraz $r = b$. Otrzymane wzory mają postać następującą:

$$
\begin{aligned}
C_\lambda^{(1)} &= 4\pi a^5 q(a)\left(\frac{q(a)}{2\lambda+1} - \frac{\bar{q}}{3}\right) - \frac{8\pi a^5 q(a)}{(2\lambda+1)(a^{2\lambda+1} - b^{2\lambda+1})}\left\{\int_b^a r^{2\lambda+1}\frac{dq}{dr}\,dr + \right.\\
&\left. - b^{2\lambda+1}[q(a) - q(b)]\right\} + \frac{4\pi}{(2\lambda+1)(a^{2\lambda+1} - b^{2\lambda+1})}\int_b^a\left\{\int_r^a\left[1 - \left(\frac{b}{s}\right)^{2\lambda+1}\right]\frac{dq}{ds}\,ds + \right.\\
&\left. + \frac{1}{r^{2\lambda+1}}\int_b^r (s^{2\lambda+1} - b^{2\lambda+1})\frac{dq}{ds}\,ds\right\}(r^{2\lambda+1} - b^{2+1})\frac{dq}{dr}\,dr + \\
&+ \frac{4\pi a^{2\lambda+6}}{(a^{2\lambda+1} - b^{2\lambda+1})^2}\int_b^a\left[\frac{(r^{2\lambda+1} - b^{2\gamma+1})^2}{r^{2\lambda+4}}\frac{dq}{dr}\int_b^r q s^2\,ds\right]dr
\end{aligned}
$$

$$
\mathcal{B}_\lambda = \frac{a^{2\lambda+6}(2\lambda+1)}{\lambda(a^{2\lambda+1} - b^{2\lambda+1})^2}\int_b^a \rho\cdot r^{2\lambda}\left[1 + \frac{\lambda}{\lambda+1}\left(\frac{b}{r}\right)^{4\lambda+2}\right]dr
$$

$\bar{q} = \frac{1}{a^3}\int_0^a q r^2\,dr$ jest średnią gęstością ładunku w kuli.

W rozpatrywanym przypadku napięcia powierzchniowe między warstwami znikają w granicy i pozostaje tylko napięcie powierzchni zewnętrznej σ. Wtedy ze wzoru (6, 1) otrzymuję:

$$
C_\lambda^{(2)} = \frac{\sigma a^2}{2}(\lambda - 1)(\lambda + 2).
$$

Wzór na częstości drgań będzie taki, jak we wszystkich poprzednich przypadkach:

$$
\omega_\lambda^2 = \frac{C_\lambda}{\mathcal{B}_\lambda}, \text{ gdzie } C_\lambda = C_\lambda^{(1)} + C_\lambda^{(2)}.
$$

PIŚMIENNICTWO

1. H. Lamb: Hydrodynamics. Cambridge 1906.

2. L. Landau i E. Lifszic: Mechanika ośrodków ciągłych. PWN Warszawa 1958.

3. A. S. Dawydow: Teorija atomnogo jadra. Moskwa 1958.

РЕЗЮМЕ

Рассмотрены колебания n слоев жидкости, покрывающих концентрический твердый сердечник. Предполагаем, что жидкость идеальна, несжимаема, не проводит электричества, и что плотности масс и зарядов в слоях постоянны.

Учтено также поверхностное натяжение. Вычислены частоты собственных колебаний. Посредством перехода к пределу получены формулы частот собственных колебаний для случая, когда плотности масс и зарядов являются непрерывными функциями расстояния точки от центра шара.

SUMMARY

The author investigated the oscillations of a n layer liquid, covering a rigid core concentrically. The liquid is assumed ideal. non-compressible and non-conducting, the mass and electric charge densities being constant. The surface tensions have also been taken in account.

The aim of the paper is to calculate the frequency of the self-oscillations. By means of a limiting process one obtains formulas for the self-oscillations in the case when the mass and electric charge densities are continuous functions of the distance of the point from the centre of the sphere.

Papier druk. sat. III kl. 80 g.	Format 70×100	Druku 11 str.
Annales UMCS Lublin 1961	Lub. Druk. Pras. Lublin, Unicka 4	Zam. 190. 17.I.62
600+50 egz. D-4	Manuskrypt otrzymano 17.I.62	Druk ukończono 26.VII.62

РЕЗЮМЕ

Рассмотрены колебания [illegible] жидкости, [illegible] твердой сердцевины. Предполагается, что жидкость идеальная, несжимаемая, не проводит электричества, а [illegible] в своих постоянны.

Учтено также поверхностное натяжение. Вычисляются частоты собственных колебаний. Предельным переходом к пределу получена формула частот собственных колебаний для случая, когда плотность [illegible] являются непрерывными функциями расстояния точки от центра шара.

SUMMARY

The author investigated the oscillations of a [illegible] liquid, covering a rigid core concentrically. The liquid is assumed ideal, non-compressible and non-conducting, the mass and electric charge densities being constant. The surface tensions have also been taken in account.

The aim of the paper is to calculate the frequency of the self-oscillations, by means of a limiting process and obtains formulae for the oscillations in the case when the mass and electric charge densities are continuous functions of the distance of the point from the centre of the sphere.

ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XIII SECTIO AA 1958

ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XIV SECTIO AA

Adresse:
UNIWERSYTET MARII CURIE-SKŁODOWSKIEJ
BIURO WYDAWNICTW
LUBLIN Plac Litewski 5 POLOGNE