

Zakład Zastosowań Matematyki, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin
Zakład Matematyki Stosowanej, Politechnika Lubelska, Lublin

ZBIGNIEW BOGUCKI, JÓZEF ZDERKIEWICZ

Sur les majorantes convexes des fonctions analytiques

O majorantach wypukłych funkcji analitycznych

О выпуклых мажорантах аналитических функций

1. Introduction

Désignons par S la famille des fonctions $F(z) = z + A_2 z^2 + \dots$, analytiques et univalentes dans le cercle K_1 , où $K_r = \{z: |z| \leq r\}$. Soit

$$S^* = \left\{ f \in S: \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0, z \in K_1 \right\},$$

$$S^c = \left\{ f \in S: \operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] > 0, z \in K_1 \right\}.$$

Par B désignons la famille des fonctions $\omega(z) = c + c_1 z + \dots$, $c \geq 0$, analytiques dans le cercle K_1 , telles que $|\omega(z)| < 1$ pour $z \in K_1$ et posons $B_0 = \{\varphi = z\omega: \omega \in B\}$. Enfin soit $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$, $a_1 \geq 0$, une fonction analytique dans K_1 .

Définition. Nous dirons que f est subordonnée à F dans le cercle K_r , $F \in T \subset S$, si $f(z) = F(\omega(z))$, $z \in K_r$, $\omega \in B_0$. Nous noterons ce fait comme il suit: $f \prec_r F$.

Dans [2] les auteurs de ce travail ont démontré que si $f \prec_{-1} F$, $F \in S^c$, on a $|f'(z)| < |F'(z)|$ pour $|z| < 2 - \sqrt{3}$. Pour S et S^* le problème analogue a été résolu plus tôt par Shah Tao-shing [5]. Dans [4] Z. Lewandowski a démontré que si $|f(z)| < |F(z)|$ dans le cercle K_1 , où $F \in S$ ou S^* , on a $|f'(z)| < |F'(z)|$ pour $|z| < 2 - \sqrt{3}$. Dans ce travail nous résolvons un problème analogue dans le cas où $F \in S^c$ et nous déterminons le nombre r_0

le plus grand possible tel que

$$(|f(z)| \leq |F(z)|, z \in K_1) \Rightarrow (zf' \rightarrow_{r_0} zF'),$$

$f(z)/f'(0) \in S^c$, $F \in S^c$. Dans le cas où $F \in S$ une valeur de r_0 , d'ailleurs inexacte, a été donnée dans [3].

Nous profiterons dans la suite des limitations exactes suivantes:

$$(1.1) \quad |\omega(z)| \leq \frac{r + |\omega(0)|}{1 + r|\omega(0)|}, \quad |\omega'(z)| \leq \frac{1 - |\omega(z)|^2}{1 - r^2}, \quad |z| = r, \omega \in B,$$

$$(1.2) \quad \frac{1}{1+r} \leq \left| \frac{zF'(z)}{F(z)} \right| \leq \frac{1}{1-r}, \quad |z| = r, F \in S^c.$$

Si $p(z) = b_0 + b_1z + \dots$, $b_0 > 0$, est une fonction analytique dans le cercle K_R et si $\operatorname{Re} p(z) > 0$ pour $z \in K_R$, on a

$$(1.3) \quad |\arg p(z)| \leq 2 \arctg \frac{r}{R}, \quad |z| = r < R.$$

2. Résultat principal

Théorème 1. Soit $F \in S^c$. Si $f(z) = az + \dots$, $a \geq 0$, est analytique dans le cercle K_1 et si $|f(z)| \leq |F(z)|$ pour $z \in K_1$, on a

$$(2.1) \quad (z \in K_{1/3}) \Rightarrow (|f'(z)| \leq |F'(z)|),$$

ou l'égalité ne peut avoir lieu que si $f \equiv F$. Le nombre $1/3$ est le plus grand possible.

Démonstration. Comme $f(z) = \omega(z)F(z)$, $\omega \in B$, on a $f' = \omega'F + F'\omega$. De là, en tenant compte de (1.1) et (1.2), on tire

$$(2.2) \quad \left| \frac{f'(z)}{F'(z)} \right| \leq H(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{a+r}{1+ar} = b, \quad |z| = r,$$

où $x = |\omega(z)|$, $H(x) = A + x - Ax^2$, $A = \frac{r}{1-r}$. Un des zéros de la fonction $H(x) - 1$ est 1. Comme $0 \leq b < 1$, on a $(H(x) - 1 < 0, 0 \leq x < b) \Rightarrow (H(b) - 1 < 0)$, c'est-à-dire si

$$(2.3) \quad (1 + 2a)r^2 + 2r - 1 < 0.$$

On voit donc que si a est fixé, $0 \leq a < 1$, l'inégalité $|f'(z)| < |F'(z)|$ est vérifiée dans le cercle $K_{r(a)}$, où

$$(2.4) \quad r(a) = \frac{1}{1 + \sqrt{2(1+a)}},$$

est la racine positive du trinôme qui intervient dans le premier membre de (2.3).

Le nombre $r(a)$ est le plus grand possible, puisque pour le couple de fonctions $F(z) = z/(1+z)$, $\omega(z) = (z+a)/(1+az)$, l'égalité $[F(z)\omega(z)]' = F'(z)$ a lieu pour $z = r(a)$. Comme $r(a)$ est une fonction décroissante dans l'intervalle $\langle 0, 1 \rangle$ et que $\lim_{a \rightarrow 1} r(a) = 1/3$, la démonstration du théorème 1 est ainsi achevée.

Théorème 2. Si l'on fait sur la fonction f , qui intervient dans le théorème 1, l'hypothèse supplémentaire que $f(z)/f'(0) \in S^c$, le nombre $1/3$ ne peut être dans ce cas non plus, augmenté.

Démonstration. Soit $F(z) = z/(1+\varrho z)$, $\omega(z) = (a+\varrho z)/(1+a\varrho z)$, $0 < \varrho < 1$, $0 < a < 1$, et $f(z) = \omega(z)F(z)$. Évidemment $F \in S^c$. Comme

$$f(z) = \frac{1}{a} \left[\frac{z}{1+\varrho z} + \frac{(a^2-1)z}{(1+\varrho z)(1+a\varrho z)} \right],$$

on a, en choisissant convenablement $a_0 \in (0, 1)$ et $a \in \langle a_0, 1 \rangle$,

$$(2.5) \quad 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{1-\varrho z}{1+\varrho z} + (1-a)P(z),$$

où $P(z)$ est une fonction analytique dans le cercle $\bar{K}_1$. De (2.5) il résulte que si ϱ est arbitrairement fixé, $0 < \varrho < 1$, et si a est suffisamment proche de 1, on a

$$\operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] > 0 \text{ pour } z \in K_1,$$

c'est-à-dire $f(z)/f'(0) \in S^c$. D'autre part, l'égalité $f'(\bar{r}) = F'(\bar{r})$, $0 < \bar{r} < 1$, a lieu si $\bar{r}$ est racine positive de l'équation

$$(2.6) \quad (1+2a)\varrho^2 r^2 + 2\varrho r - 1 = 0,$$

c'est-à-dire si $\bar{r} = r(a, \varrho) = r(a)/\varrho$, $r(a)$ étant défini par (2.4). Comme $\lim_{a \rightarrow 1} r(a, \varrho) = 1/2$, l'inégalité $|f'(z)| < |F'(z)|$ n'est vérifiée que dans le cercle $K_{1/2}$, c.q.f.d.

Théorème 3. Avec les hypothèses du théorème 2 on a

$$zf' \prec_{r_0} zF', \quad r_0 = \frac{\sqrt{7}-2}{3}.$$

Le nombre r_0 est le plus grand possible.

Démonstration. Soit

$$(2.7) \quad \varphi(z, t) = z[f'(z)]^{1-t}[F'(z)]^t, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

où l'on choisit les branches des puissances en sorte que les valeurs pour $z = 0$ soient positives.

Puisque

$$\operatorname{Re} \frac{z\varphi'_z}{\varphi} = (1-t) \operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] + t \operatorname{Re} \left[1 + \frac{zF''(z)}{F'(z)} \right] > 0, \quad z \in K_1,$$

$\operatorname{Re} \frac{\varphi'_t}{\varphi} = \ln \left| \frac{F'}{f'} \right| > 0$ pour $z \in K_{1/3}$ (théorème 2), on a dans le cercle $K_{1/3}$ (en tenant compte de (1.3)),

$$\left| \arg \frac{z\varphi'_z}{\varphi} \right| \leq 2 \operatorname{arctg} r = \arcsin \frac{2r}{1+r^2}, \quad \left| \arg \frac{\varphi'_t}{\varphi} \right| \leq 2 \operatorname{arctg} 3r.$$

En appliquant maintenant le lemme 3 [1], on voit que dans le cercle $K_{1/3}$ se trouvent vérifiées les hypothèses du théorème 1 [1]. Par conséquent

$$\varphi(z, t_1) \rightarrow_{r_0} \varphi(z, t_2), \quad 0 \leq t_1 < t_2 \leq 1,$$

si et seulement si r_0 est l'unique racine de l'équation

$$(2.8) \quad \operatorname{arctg} r + \operatorname{arctg} 3r = \frac{\pi}{4}, \quad 0 < r < 1.$$

De (2.8) on tire, après quelques simples transformations, l'équation

$$3r^2 + 4r - 1 = 0, \quad \text{dont la racine positive est } r_0 = \frac{\sqrt{7}-2}{3}. \quad \text{Du § 5 [1]}$$

il résulte que le nombre r_0 est le plus grand possible. Pour achever la démonstration du théorème 3 il n'y a plus qu'à tenir compte des égalités:

$$zf'(z) = \varphi(z, 0), \quad zF'(z) = \varphi(z, 1).$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Bielecki, A., Lewandowski, Z., *Sur certaines familles de fonctions α -étoilées*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A. 15 (1961), 45-55.
- [2] Bogucki, Z., Zderkiewicz, J., *Inégalités entre les modules des dérivées de fonctions subordonnées dans le cas des majorantes convexes*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. et Phys., 11(1977), 1093-1098.
- [3] Izdebski, L., *A contribution to the theory of subordination*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A, 18 (1964), 9-12.
- [4] Lewandowski, Z., *Some results concerning univalent majorants*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A, 18 (1964), 13-18.
- [5] Shah Tao-shing, *On the radius of superiority in subordination*, Sci. Rec., 1 (5) (1957), 329-333.

STRESZCZENIE

Niech S^c oznacza rodzinę funkcji $F(z) = z + A_2 z^2 + \dots$, które odwzorowują jednolistnie koło K_1 (gdzie $K_r = \{z: |z| < r\}$) na obszary wypukłe. W pracy dowodzi się następujących twierdzeń.

Twierdzenie 1. Jeśli $F \in S^c$ natomiast funkcja $f(z) = a_1 z + \dots$, $a_1 \geq 0$, jest analityczna w kole K_1 i spełniony jest warunek: $|f(z)| < |F(z)|$, $z \in K_1$, wówczas

$$(*) \quad (z \in K_{1/3}) \Leftrightarrow (|f'(z)| < |F'(z)|).$$

Twierdzenie 2. Jeżeli $F \in S^c$ zaś funkcja $f(z) = a_1 z + \dots$, $a_1 > 0$, jest analityczna w kole K_1 i spełnia warunki: $f(z)/f'(0) \in S^c$ i $|f(z)| < |F(z)|$, $z \in K_1$, wówczas ma także miejsce (*).

Twierdzenie 3. Jeżeli $F \in S^c$ i $f(z)/f'(0) \in S^c$ oraz $|f(z)| < |F(z)|$ w kole K_1 , wówczas

$$\left(0 < r < \frac{\sqrt{7}-2}{3}\right) \Leftrightarrow (g(K_r) \subset G(K_r)).$$

gdzie $g(z) = zf'(z)$, $G(z) = zF'(z)$.

РЕЗЮМЕ

Пусть S^c обозначает класс функций $F(z) = z + a_2 z^2 + \dots$, которые однолистно отображают круг $K_1(K_r = \{z: |z| < r\})$ на выпуклые области.

В настоящей работе доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Если $F \in S^c$ и $f(z) = a_1 z + \dots$, $a_1 \geq 0$ является аналитической функцией в круге K_1 и удовлетворяет условию:

$$|f(z)| < |F(z)|, \quad z \in K_1, \quad \text{тогда} \quad (*) (z \in K_{1/3}) \Leftrightarrow (|f'(z)| < |F'(z)|)$$

Теорема 2. Если $F \in S^c$ а $f(z) = a_1 z + \dots$, $a_1 > 0$, является аналитической функцией в круге K_1 , удовлетворяющей условия

$$\frac{f(z)}{f'(0)} \in S^c \text{ и } |f(z)| < |F(z)|, \quad z \in K_1,$$

тогда тоже имеет место (*)

Теорема 3. Если $F \in S^c$ и $\frac{f(z)}{f'(0)} \in S^c$ и $|f(z)| < |F(z)|$ в круге K_1 , тогда

$$\left(0 < r < \frac{\sqrt{7}-2}{3}\right) \Leftrightarrow (g(K_r) \subset F(K_r)),$$

где $g(z) = zf'(z)$, $F(z) = zF'(z)$.

