ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN – POLONIA

VOL. XXVIII, 13 SECTIO A 1974

Zespół Matematyki Wyższej Szkoły Inżynierskiej, Lublin

JÓZEF ZDERKIEWICZ

Sur la courbure des lignes de niveau dans la classe $\sum_a^c$.

O krzywiźnie poziomic w klasie $\sum_a^c$.

О кривизне линий уровня в классе $\sum_a^c$

1. Introduction et remarques préliminaires.

Soit $\sum_a^c$, $0 \leqslant a < 1$, la famille des fonctions

$$F(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots,$$

holomorphes et univalentes dans le domaine $|z| > 1$ et satisfaisant à la condition

$$\text{(1.1)} \qquad \operatorname{Re}\left[1 + \frac{zF''(z)}{F'(z)}\right] > a \quad \text{pour} \quad |z| > 1.$$

$\sum_0^c = \sum^c$ est la famille des fonctions $\sum$-convexes, c'est-à-dire des fonctions qui représentent le domaine $|z| > 1$ sur des domaines dont les complémentaires sont des ensembles convexes. Soit $F(z) \in \sum_a^c$. Désignons par $K_r(\vartheta)$ la courbure de l'image de la circonférence $z = re^{i\vartheta}$, $r > 1$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$ dans la représentation $w = F(z)$, au point $F(re^{i\vartheta})$. Zmorovič [1] a obtenu les limitations exactes de la courbure $K_r(\vartheta)$ dans la classe de fonctions $\sum^c$. Dans ce travail nous résolvons ce problème dans la famille $\sum_a^c$, $0 \leqslant a < 1$. Dans les raisonnements nous avons appliqué la méthode de Zmorovič [1]. Voici notre résultat principal:

Désignons par M la famille des fonctions non décroissantes dans l'intervalle $\langle -\pi, \pi \rangle$, normées par les conditions

$$\text{(1.2)} \qquad \mu(-\pi + 0) = \mu(-\pi), \; \mu(\pi) = 1.$$

Supposons que la fonctionnelle réelle $\mathcal{J}(\mu)$, définie sur la famille M, ait la propriété suivante:

$$\mathcal{J}(\mu+\varepsilon\eta) = \mathcal{J}(\mu)+\varepsilon A(\mu,\eta)+\varepsilon^2 B(\mu,\eta;\varepsilon) \tag{1.3}$$

où le nombre ε et la fonction $\eta = \eta(\theta)$ sont choisis de telle manière que l'on ait $\mu(\theta)+\varepsilon\eta(\theta)\in M$,

$$A(\mu,\eta) = \int_{\pi}^{\pi} F_\mu(\theta)\,d\eta,$$

$F_\mu(\theta)$ est une fonction continue et strictement monotone dans un voisinage suffisamment petit gauche ou droit de tout point $\theta\in\langle -\pi,\pi\rangle$, $|B(\mu,\eta;\varepsilon)| < B_0$ pour $|\varepsilon|$ et $\operatorname{Var}\eta(\theta)$ suffisamment petits dans l'intervalle $\langle -\pi,\pi\rangle$.

Dans ces conditions la fonction extrémale $\mu_0(\theta)$ pour la fonctionnelle $\mathcal{J}(\mu)$ est une fonction en escalier dont le nombre de sauts ne surpasse pas celui des points extrémaux de la fonction $F_\mu(\theta)$ dans l'intervalle $\langle -\pi,\pi\rangle$. Par extrémum on entend toujours un maximum ou un minimum.

2. Résultat principal.

Soit P la famille des fonctions $p(z)$ holomorphes dans le cercle $|z|<1$ telles que $p(0) = 1$, $\operatorname{Re}p(z)>0$ pour $|z|<1$. La condition (1.1) entraîne que $F(z)\in\sum_\alpha^c$ si et seulement si

$$1+\frac{zF''(z)}{F'(z)} = p(z),\quad p(z)\in P.$$

De là, en tenant compte de la représentation bien connue de la famille P, donnée par Herglotz, on tire la formule structurale de la famille $\sum_\alpha^c$ sous la forme

$$F(z) = w_0+\int_{z_0}^{z} e^{2(1-\alpha)\int_{-\pi}^{\pi}\log\left(1-\frac{e^{i\theta}}{\zeta}\right)d\mu(\theta)}\,d\zeta, \tag{2.1}$$

où z_0, $|z|>1$ est un point quelconque fixé, $\mu(\theta)\in M^*$, M^* étant la sous-classe de la famille (1.2) des fonctions $\mu(\theta)$ qui remplissent la condition

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta}\,d\mu(\theta) = 0. \tag{2.2}$$

Soit $F(z)\in\sum_\alpha^c$. On sait que la courbure $K_r(\vartheta)$ s'exprime par la formule

$$K_r(\vartheta) = \frac{\operatorname{Re}\left[1+\dfrac{zF''(z)}{F'(z)}\right]}{|zF'(z)|},\quad z = re^{i\vartheta}. \tag{2.3}$$

Comme $\sum_a^c$ est une classe de révolution (pour γ réel quelconque, $F(z) \in \sum_c^a$ si et seulement si $e^{i\gamma}F(ze^{-i\gamma}) \in \sum_a^c$), on ne nuira pas à la généralité des raisonnements en admettant $\vartheta = 0$ et désignant $K_r(0) = K_r$. En vertu des formules (2.1) et (2.3) on a

$$K_r = \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{P}{F} d\mu}{r \exp\left[(1-a) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \log F d\mu\right]},$$

où $R = 1/r$,

$$P = P(\theta) = 1 - 2aR \cdot \cos\theta - (2a-1)R^2, \tag{2.4}$$

$$F = F(\theta) = 1 - 2r \cdot \cos\theta + R^2.$$

Considérons la fonctionnelle

$$\mathscr{J}(\mu) = rKr, \quad \mu \in M^*. \tag{2.5}$$

La formule (2.2) montre que la détermination de l'extrémum de la fonctionnelle $\mathscr{J}(\mu)$ dans la famille M^* est équivalente à la détermination de l'extrémum de cette fonctionnelle dans la famille M avec les conditions

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos\theta d\mu(\theta) = 0 \quad \text{et} \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin\theta d\mu(\theta) = 0.$$

Admettons donc

$$\tilde{\mathscr{J}}(\mu) = \mathscr{J}(\mu) + C_1 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos\theta d\mu(\theta) + C_2 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin\theta d\mu(\theta),$$

où C_1 et C_2 sont des nombres réels quelconques. De la propriété (1.3) de la fonctionnelle $\tilde{\mathscr{J}}(\mu)$ on déduit

$$F_\mu(\theta) = C_\mu\left[\frac{P}{F} + (1-a)A_\mu \log\frac{1}{F}\right] + C_1\cos\theta + C_2\sin\theta, \tag{2.6}$$

où

$$C_\mu = \exp\left[(1-a)\int\limits_{-\pi}^{\pi} \log\frac{1}{F} d\mu\right] > 0, \quad A_\mu = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{P}{F} d\mu > 0.$$

Nous allons déterminer l'extrémum de la fonction $F_\mu(\theta)$ dans l'intervalle $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Lemme 1. *Si $A > 0$, C, D sont des nombres réels quelconques, la fonction $F = F(\theta)$ est définie dans (2.4) et si*

$$p(\theta) = \frac{1}{F^2} + \frac{A}{F} - C - D\operatorname{ctg}\theta, \tag{2.7}$$

l'équation

$$p(\theta) = 0$$

admet quatre racines au plus dans l'intervalle $(-\pi, \pi\rangle$.

Démonstration. Dérivant la fonction (2.7) par rapport à la variable θ on a

$$p'(\theta) = \frac{-2R}{\sin^2\theta} \cdot q(\theta), \tag{2.8}$$

où

$$q(\theta) = \sin^3\theta\left(\frac{2}{F^3} + \frac{A}{F^2}\right) - \frac{D}{2R}.$$

Examinons le signe de la fonction $q(\theta)$ dans l'intervalle $(0, \pi\rangle$.

$$q'(\theta) = 3 \cdot \frac{3 + AF}{F^4} \sin^2\theta\left(\frac{2F + AF^2}{3 + AF} \cos\theta - \frac{4R}{3} \sin^2\theta\right). \tag{2.9}$$

Puisque d'après (2.4) $\cos\theta = \dfrac{1 + R^2 - F}{2R}$, l'expression entre parenthèses dans (2.9) prendra la forme $H(F)/K(F)$, où

$$K(F) = 6R(3 + AF) > 0,$$

$$H(F) = 6(1 - R^2)^2 + 2A(1 - R^2)^2 - 6(1 + R^2)F - A(1 + R^2)F - AF^3.$$

D'où l'on tire

$$H''(F) = -2A(1 + R^2 + 3F).$$

La fonction $H''(F)$ est décroissante par rapport à la variable F dans l'intervalle $\langle(1 - R)^2, 1 + R^2\rangle$ et $H''[(1 - R)^2] < 0$, donc $H(F)$ est une fonction convexe dans cet intervalle. Comme $H(F(0)) > 0$ et $H\left(F\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) < 0$ et $q(\theta)$ est une fonction décroissante dans l'intervalle $\left\langle\frac{\pi}{2}, \pi\right\rangle$, $p(\theta)$ admet trois racines au plus dans l'intervalle $\langle 0, \pi\rangle$. De (2.8) il résulte que l'équation $p(\theta)=0$ a une racine dans l'intervalle $(-\pi, 0)$ si $D>0$. Dans le cas où $D<0$, cette équation admet une racine dans l'intervalle $(0, \pi)$ et la démonstration du lemme 1 est achevée.

Lemme 2. *Si la fonction $F_\mu(\theta)$ est définie par la formule* (2.6),*l' équation*

$$F'_\mu(\theta)=0$$

a par rapport à l'inconnue θ quatre racines au plus dans l'intervalle $(-\pi, \pi\rangle$.

Démonstration. Dérivant la fonction $F_\mu(\theta)$ par rapport à θ on obtient

$$F'_\mu(\theta)=-2(1-a)R(1-R^2)C_\mu\sin\theta\left[\frac{1}{F^2}+\frac{A_\mu}{(1-R^2)F}\right]-C_1\sin\theta+C_2\cos\theta.$$

Donc, si $C_2=0$, l'équation (2.10) prendra la forme

$$-2(1-a)R(1-R^2)C_\mu\sin\theta\left(\frac{1}{F^2}+\frac{A}{F}-C\right)=0, \tag{2.11}$$

où

$$A=\frac{A_\mu}{1-R^2}>0, \qquad C=\frac{-C_1}{2(1-a)R(1-R^2)C_\mu}.$$

Puisque la fonction $F^{-2}(\theta)+A/F(\theta)$ est paire et croissante dans l'intervalle $\langle 0, \pi\rangle$ et que les nombres 0 et π sont racines de l'équation (2.11), cette équation admet quatre racines au plus dans l'intervalle $(-\pi, \pi\rangle$.

Si $C_2\neq 0$, l'équation (2.10) prend la forme

$$\frac{1}{F^2}+\frac{A}{F}-C-D\operatorname{ctg}\theta=0,$$

où A, C sont définis par (2.11) et $D=\dfrac{C_2}{2(1-a)R(1-R^2)C_\mu}$. Le lemme 1 permet enfin d'achever la démonstration du lemme 2.

En tenant compte du lemme 2 et de la méthode que nous venons d'appliquer on constate que les fonctions extrémales $\mu_0(t)$, pour lesquelles la fonctionnelle $\mathcal{J}(\mu)$ atteint son maximum et son minimum, sont des fonctions en escalier avec deux sauts au plus. De (2.2) il résulte qu'elles en ont exactement deux. Supposons donc que $\mu_0(t)$ admette les sauts λ et $1-\lambda$, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ aux points θ et $\theta+\beta$, $\beta>0$. De l'égalité (2.2) pour la fonction $\mu_0(t)$ on obtient $\beta=\pi$ et $\lambda=\dfrac{1}{2}$, d'où, en vertu de (2.5)

$$\mathcal{J}(\mu_0)=\mathcal{J}(R, a, \theta)=\frac{1+2a(1-2\cos^2\theta)R^2+(2a-1)R^4}{[(1+R^2)^2-4R^2\cos^2\theta]^{\frac{3-a}{2}}},$$

où $-\pi<\theta\leqslant 0$.

On voit aisément que pour tout r, $0 < r < 1$, et α, $0 \leqslant \alpha < 1$.

$$\min \mathscr{J}(\mu) = \mathscr{J}\left(\frac{1}{r}, \alpha, -\frac{\pi}{2}\right), \quad \max \mathscr{J}(\mu) = \mathscr{J}\left(\frac{1}{r}, \alpha, 0\right). \tag{2.12}$$

Théorème 1. *Soit* $\sum_{\alpha}^{c}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, *la famille des fonctions convexes* $F(z)$ *de la forme* (2.1) *et désignons par* $K_r(\vartheta)$ *la courbure de l'image de la circonférence* $|z| = r$, $r > 1$, *dans la représentation* $w = F(z)$, *au point* $z = re^{i\vartheta}$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$. *Alors*

$$\frac{1+2\alpha\frac{1}{r^2}+(2\alpha-1)\frac{1}{r^4}}{r\left(1+\frac{1}{r^2}\right)^{3-\alpha}} \leqslant K_r(\vartheta) \leqslant \frac{1-2\alpha\frac{1}{r^2}+(2\alpha-1)\frac{1}{r^4}}{r\left(1-\frac{1}{r^2}\right)^{3-\alpha}}. \tag{2.13}$$

Les limitations (2.13) *sont exactes. L'égalité dans les limitations inférieure et supérieure au point* $z = re^{i\vartheta}$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$, *a lieu pour la fonction*

$$F^*(z) = w_0 + \int_{z_0}^{z} \left(1 \pm \frac{e^{2\vartheta i}}{\zeta^2}\right)^{1-\alpha} d\zeta. \tag{2.14}$$

Démonstration. L'inégalité (2.13) résulte de (2.5) et (2.12). En vertu de (2.1) et (2.12) on obtient les fonctions (2.14).

Remarque. En posant $\alpha = 0$ dans la limitation (2.13) on retrouve un résultat connu de Zmorovič [1].

RÉFÉRENCES

[1] Zmorovič V. A. (Зморович В. А.), *О некоторых вариационных задачах теории однолистных функций*, Украин. Мат. Ж., 4 (1952), 276-298.

STRESZCZENIE

Przedmiotem pracy jest uzyskanie dokładnych oszacowań (2.13) krzywizny obrazów okręgu $|z| = r$, $r > 1$, przy odwzorowaniu funkcjami rodziny $\sum_{\alpha}^{c}$, $0 \leqslant \alpha < 1$ określonymi wzorem (2.2).

РЕЗЮМЕ

Целью работы является получение точных оценок (2.13) кривизны образов окружности $|z| = r, r > 1$ при отображении выпуклыми функциями $\sum_{\alpha}^{c}$, $0 \leqslant \alpha < 1$ определяемыми формулой (2.2).