

Instytut Ekonomii Politycznej i Planowania, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin

ZOFIA STANKIEWICZ

**Sur la subordination en domaine de certains opérateurs dans les
classes $S(\alpha, \beta)$**

Podporządkowanie obszarowe pewnych operatorów w klasach $S(\alpha, \beta)$

Подчинение по областям некоторых операторов в классах $S(\alpha, \beta)$

1. Soient $f(z)$ et $F(z)$, $f(0) = F(0)$, des fonctions régulières dans le cercle $K_r = \{z: |z| < r\}$.

Si l'on a la relation

$$f(z) = F(\omega(z)) \text{ pour } |z| < r,$$

où $\omega(z)$ est une fonction holomorphe et $|\omega(z)| \leq |z| < r$, on dit que la fonction $f(z)$ est subordonnée en domaine à la fonction $F(z)$ dans le cercle K_r et on écrit

$$f(z) \rightarrow_r F(z).$$

$F(z)$ est alors dite majorante en domaine de la fonction $f(z)$.

Si $F(z)$ est de plus univalente dans K_r , on l'appelle majorante univalente de la fonction $f(z)$.

Dans de nombreux travaux, entre autres [1] et [5], les auteurs étudient le problème suivant: pour quel r , aussi grand que possible, la subordination $f(z) \rightarrow_r F(z)$ entraîne-t-elle la subordination de certains opérateurs des fonctions $f(z)$ et $F(z)$ dans le cercle K_r , où $F(z)$ sont des fonctions quelconques de certaines classes fixées de fonctions régulières dans K_1 .

Dans le présent travail nous étudierons ce problème pour les fonctions $F(z)$ appartenant à la classe $S(\alpha, \beta)$ et à ses sous-classes $S(0, 0) = S^c$, $S(\alpha, 0)$, $S(0, \beta)$.

Nous n'entreprenons pas ici l'étude correspondante pour la classe S des fonctions étoilées dans K_1 par rapport à $w = 0$, car les résultats analogues établis par Robinson [5] et Alenicyan [1] pour la classe S des

fonctions $F(z) = z + a_2 z^2 + \dots$, régulières et holomorphes dans K_1 ne peuvent être améliorés quand on remplace la classe S des majorantes univalentes par la classe S^* .

On dit que la fonction $f(z) \in S(\alpha, \beta)$, $\alpha \in (-1, 0)$, $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, si $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et si pour $z \in K_1$, on a

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{i\beta} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \right\} > \alpha \cos \beta.$$

En prenant $\alpha = \beta = 0$ on obtient la classe bien connue S^c des fonctions convexes, donc $S^c = S(0, 0)$.

D'autre part, si $\beta = 0$, $\alpha \in (-1, 0)$, on obtient la classe $S(\alpha, 0)$ des fonctions α -convexes, c'est-à-dire satisfaisant à la condition

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > \alpha \text{ pour } z \in K_1.$$

En prenant $\alpha = 0$, $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ on obtient la classe $S(0, \beta)$ des fonctions β spiralement convexes, c'est-à-dire satisfaisant à la condition

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{i\beta} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \right\} > 0 \text{ pour } z \in K_1.$$

Dans ce travail nous utiliserons la méthode de Robinson [5], développée par Aliencyn [1], que les théorèmes 1 et 2 présentent sous une forme plus générale que chez les auteurs mentionnés.

2. Soit $g(z)$ une fonction régulière dans le cercle K_1 . Nous désignerons par F un opérateur satisfaisant aux deux conditions:

1°. L'opérateur F appliqué à la fonction $g(z)$ fournit une fonction de la variable z régulière dans K_1 . La fonction ainsi construite sera désignée par $F_z g(z)$.

2°. Si dans le cercle K_1 $g(z) \equiv G(\zeta(z))$, où $\zeta(z)$ est une fonction régulière dans K_1 et $|\zeta(z)| < 1$, on a

$$F_\zeta G(\zeta) = F_z g(z), \quad \zeta = \zeta(z), \quad |z| < 1.$$

La condition 2 exclut en particulier les opérations de dérivation et d'intégration par rapport à l'argument de la fonction.

Nous définirons maintenant l'opérateur $\mathcal{J}$ par l'égalité

$$\mathcal{J}_z g(z) = F_z g(z) + zg'(z)$$

où $\mathcal{J}_z g(z)$ désigne la fonction obtenue à partir de la fonction $g(z)$ en appliquant à celle-ci l'opérateur $\mathcal{J}$. Dans le cas où il ne sera pas nécessaire de mettre en évidence l'argument on écrira simplement $\mathcal{J}g(z)$.

Théorème 1. Soit $g_n(z) = a_1 z + a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \dots$ une fonction régulière dans K_1 et $G_n(z) = z + A_{n+1} z^{n+1} + A_{n+2} z^{n+2} + \dots$ une fonction régulière et localement univalente, c'est-à-dire que $G'_n(z) \neq 0$ dans K_1 . Si $G_n(z)$ est une majorante en domaine de la fonction $g_n(z)$ dans le cercle K_1 , alors pour que $\mathcal{J}G_n(z)$ soit une majorante univalente de la fonction $\mathcal{J}g_n(z)$ dans $|z| \leq r$ il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient simultanément remplies :

1°. la fonction $\mathcal{J}G_n(z)$ est univalent pour $|z| \leq r$,

2°. pour tous les ζ et Z du cercle $|\zeta| \leq |Z| = r$ a lieu l'inégalité

$$\left| \frac{\mathcal{J}G_n(Z) - \mathcal{J}G_n(\zeta)}{G'_n(\zeta)} \right| \geq \frac{nr^{n-1}(r^2 - |\zeta|^2)}{1 - r^{2n}}.$$

Sous l'hypothèse plus forte que $G_n(z)$ est univalente, ce théorème a été énoncé et démontré pour certains opérateurs par Robinson; pour la classe plus générale des opérateurs $\mathcal{J}G_n(z)$, qui contient les opérateurs de Robinson, il a été établi par Alienicy (voir [1], p. 58, théor. 1).

La démonstration du théorème énoncé dans le présent travail est identique (sans aucune modification) à celle de Alienicy qui n'a utilisé dans sa preuve que l'univalence de $\mathcal{J}G_n(z)$ dans le cercle $|z| \leq r$ et le fait que $G'_n(z) \neq 0$ pour $z \in K_1$.

Théorème 2. Si la fonction $G_n(z)$ est régulière et localement univalente dans K_1 et convexe pour $|z| \leq r$, pour que la condition $g_n(z) \rightarrow_1 G_n(z)$ entraîne que $\mathcal{J}G_n(z)$ est une majorante univalente de la fonction $\mathcal{J}g_n(z)$ dans le cercle $|z| \leq r$, il faut et il suffit que la fonction $\mathcal{J}G_n(z)$ soit univalente dans le cercle $|z| \leq r$ et que dans ce cercle soit satisfaite l'inégalité

$$(2.1) \quad \left| \frac{d\mathcal{J}G_n(z)}{dz} \right| \geq |G'_n(z)| \frac{2nr^n}{1 - r^{2n}}.$$

La démonstration dans ce cas aussi, est identique à celle de Alienicy (voir [1], théor. 2).

Nous étudierons dans la suite de ce travail l'opérateur $\mathcal{J}f$ de la forme

$$(2.2) \quad \mathcal{J}f(z) = \mu f(z) + z f'(z)$$

où μ est un nombre réel quelconque.

3. Dans ce paragraphe nous établirons quelques théorèmes qui se rapportent à l'implication

$$(g \rightarrow_1 G) \Rightarrow (\mathcal{J}g \rightarrow_r \mathcal{J}G), \quad 0 \leq r < 1.$$

Au § 4 nous allons voir si les résultats obtenus sont exacts.

Théorème 3. Soit $G(z) \in S(\alpha, \beta)$. Alors, pour tout μ réel, $\mu \geq 0$ la subordination

$$g(z) \rightarrow {}_1G(z)$$

entraîne

$$(3.1) \quad \mathcal{J}g(z) \rightarrow \mathcal{J}G(z)$$

dans le cercle $|z| \leq r_\mu(\alpha, \beta)$, où

$$r_\mu(\alpha, \beta) = \min \{r_c(\alpha, \beta), r'(\mu, \alpha, \beta)\},$$

$$(3.2) \quad r_c(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{(1-\alpha)\cos\beta - \sqrt{1-(1-\alpha^2)\cos^2\beta}}{2(1-\alpha)\cos^2\beta - 1} & \text{si } \alpha \neq \frac{2\cos^2\beta - 1}{2\cos\beta} \\ \cos\beta & \text{si } \alpha = \frac{2\cos^2\beta - 1}{2\cos\beta} \end{cases}$$

(3.3)

$$r'(\mu, \alpha, \beta) = \sqrt{\frac{2[1 + (1-\alpha)\cos\beta]^2 - (1+\mu)A(\mu, \alpha, \beta) - \sqrt{B(\mu, \alpha, \beta)}}{A^2(\mu, \alpha, \beta) + 4(1-\alpha)^2\sin^2\beta\cos^2\beta}}$$

$$A(\mu, \alpha, \beta) = 2(1-\alpha)\cos^2\beta - (1+\mu)$$

$$B(\mu, \alpha, \beta) = [(1+\mu)A(\mu, \alpha, \beta) - 2(1 + (1-\alpha)\cos\beta)^2] - (1+\mu)^2[A^2(\mu, \alpha, \beta) + 4(1-\alpha)^2\sin^2\beta\cos^2\beta].$$

Démonstration. Nous allons déterminer le domaine de variation de la fonctionnelle $w = 1 + zG''(z)/G'(z)$ pour la classe $S(\alpha, \beta)$. Soit

$$w_0(z) = e^{i\beta} \left(1 + \frac{zG''(z)}{G'(z)} \right), \quad \operatorname{Re}\{w_0\} > \alpha \cos\beta.$$

Admettons

$$(3.4) \quad w_1(z) = \frac{w_0(z) - i\sin\beta}{\cos\beta}, \quad w_1(0) = 1$$

et, de plus,

$$\operatorname{Re}\{w_1(z)\} = \frac{1}{\cos\beta} \operatorname{Re}\{w_0(z)\} > \alpha.$$

Par conséquent $w_1(z)$ est une fonction classiquement normée pour laquelle $\operatorname{Re}\{w_1\} > \alpha$. On sait que le domaine de variation d'une telle fonction est le cercle

$$\left| w_1 - \frac{1+r^2(1-2\alpha)}{1-r^2} \right| \leq \frac{2r(1-\alpha)}{1-r^2}.$$

De (3.4) il résulte que

$$w_0(z) = w_1(z)\cos\beta + i\sin\beta$$

donc le domaine de variation de la fonctionnelle w_0 est le cercle

$$\left| w_0 - \left[\frac{1 + r^2(1-2a)}{1-r^2} \cos \beta + i \sin \beta \right] \right| \leq \frac{2r(1-a)}{1-r^2} \cos \beta.$$

En faisant encore subir à ce cercle une rotation d'angle $-\beta$ on trouve que le domaine de variation de la fonctionnelle w est le cercle

$$(3.5) \quad \left| w - e^{-i\beta} \frac{1 + r^2(1-2a)}{1-r^2} \cos \beta + i \sin \beta \right| \leq \frac{2r(1-a)}{1-r^2} \cos \beta.$$

En utilisant ce domaine nous allons déterminer le rayon de convexité $r_c(a, \beta)$ dans la classe $S(a, \beta)$. Cherchons un r , $r = |z| < 1$, aussi grand que possible, tel que

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zG''(z)}{G'(z)} \right\} \geq 0.$$

Dans ce but nous résolvons l'inégalité

$$(3.6) \quad \operatorname{Re}\{w\} > \left[\cos^2 \beta \frac{1 + r^2(1-2a)}{1-r^2} + \sin^2 \beta \right] - \frac{2r(1-a)}{1-r^2} \cos \beta \geq 0.$$

L'inégalité (3.6) se ramène, après quelques transformations, à la suivante:

$$r^2[2(1-a)\cos^2 \beta - 1] - 2r(1-a)\cos \beta + 1 \geq 0,$$

qui est vraie pour tout $r \leq r_c(a, \beta)$, où $r_c(a, \beta)$ est défini par la formule (3.2). Par conséquent les fonctions de la classe $S(a, \beta)$ sont convexes au moins dans le cercle $|z| \leq r_c(a, \beta)$. Ce résultat peut être déduit du rayon v de spirauté des fonctions θ spirales, déterminé par W.A. Zmorowicz (voir [6], théor. 1 et 4).

Du théorème 2 il résulte que pour établir le théorème 3 il faut démontrer l'univalence de l'opérateur (2.2) dans un cercle. L'univalence de cet opérateur pour $\mu \geq 0$ et $|z| \leq r_c(a, \beta)$ résulte directement d'un théorème de A. Bielecki et Z. Lewandowski [2] dont voici l'énoncé:

Si $f(z)$ est une fonction presque convexe par rapport à la fonction convexe $\varphi(z)$ pour $z \in K_1$ (c'est-à-dire $\operatorname{Re}\{f(z)/g(z)\} > 0$) la fonction $\psi(z, t) = f(z) + tz\varphi'(z)$ est une fonction univalente presque convexe dans le cercle K_1 pour tout $t \geq 0$.

Il reste à montrer que la condition (2.1) est vérifiée dans un cercle. Pour l'opérateur (2.2) cette condition admet la forme

$$\left| \mu + 1 + \frac{zG''(z)}{G'(z)} \right| \geq \frac{2r}{1-r^2}.$$

En posant

$$\omega = \mu + 1 + \frac{zG''(z)}{G'(z)}$$

on aura

$$(3.7) \quad |\omega| \geq \frac{2r}{1-r^2}.$$

De l'inégalité (3.5) il résulte, de plus, que $\omega(z)$ varie dans le cercle

$$(3.8) \quad \left| \omega - \left[\left(\frac{1+r^2(1-2\alpha)}{1-r^2} \cos^2 \beta + \sin^2 \beta + \mu \right) + i \sin \beta \cos \beta \left(1 - \frac{1+r^2(1-2\alpha)}{1-r^2} \right) \right] \right| \leq \frac{2r(1-\alpha)}{1-r^2} \cos \beta.$$

Les formules (3.7) et (3.8) montrent que la condition demandée (2.1) est vérifiée si

$$\left| \frac{1+r^2(1-2\alpha)}{1-r^2} \cos^2 \beta + \sin^2 \beta + \mu + i \sin \beta \cos \beta \left(1 - \frac{1+r^2(1-2\alpha)}{1-r^2} \right) \right| - \frac{2r(1-\alpha)}{1-r^2} \cos \beta \geq \frac{2r}{1-r^2}.$$

Cette dernière inégalité prend, après quelques transformations, la forme

$$r^4 [A^2(\mu, \alpha, \beta) + 4(1-\alpha)^2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta] + 2r^2(1+\mu)A(\mu, \alpha, \beta) - 2(1+(1-\alpha)\cos \beta)^2 + (1+\mu)^2 \geq 0$$

où

$$A(\mu, \alpha, \beta) = 2(1-\alpha)\cos^2 \beta - (1+\mu),$$

inégalité qui a lieu pour tous les $r \leq r'(\mu, \alpha, \beta)$, $r'(\mu, \alpha, \beta)$ étant défini par la formule (3.3).

Par conséquent la subordination $\mathcal{J}g(z) \rightarrow \mathcal{J}G(z)$ pour la fonction $G(z) \in \mathcal{S}(\alpha, \beta)$ a bien lieu dans le cercle

$$|z| \leq r_\mu(\alpha, \beta) = \min\{r_c(\alpha, \beta), r'(\mu, \alpha, \beta)\},$$

et le théorème est ainsi démontré.

Du théorème 3 on obtient pour $\alpha = 0$ et $\mu = 0$:

Théorème 4. Si $G(z) \in \mathcal{S}(0, \beta)$, on a

$$[g(z) \rightarrow {}_1G(z)] \Rightarrow [zg'(z) \rightarrow {}_{r_0}zG'(z)],$$

où

$$r_0 = r_0(0, \beta) = \sqrt{2+2\cos \beta} - \sqrt{1+2\cos \beta}.$$

Pour $a = 0$ et $\mu = 1$ on obtient :

Théorème 5. Si $G(z) \in S(0, \beta)$, on a

$$[g(z) \rightarrow {}_1G(z)] \Rightarrow [(zg(z))' \rightarrow {}_{r_1}(zG(z))'],$$

où

$$(3.9) \quad \begin{aligned} r_1 &= r_1(0, \beta) = \min \{r'(1, 0, \beta), r_c(0, \beta)\} \\ r_c(0, \beta) &= [\cos \beta + |\sin \beta|]^{-1} \end{aligned}$$

$$r'(1, 0, \beta)$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{3 + 2 \cos \beta - \cos^2 \beta - \sqrt{(1 + \cos \beta)(\cos^3 \beta - 5 \cos^2 \beta + 7 \cos \beta + 5)}}{2(1 - \cos^2 \beta)}} & \text{pour } \beta \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{pour } \beta = 0. \end{cases}$$

Le nombre $r_c(0, \beta)$ est le rayon de convexité dans la classe $S(0, \beta)$ et peut être déterminé soit en posant $a = 0$ dans (3.2), soit en se rapportant au travail de R.J. Libera et M.R. Ziegler [4].

En mettant dans le théorème 3 $a = 0$, $\mu \geq 0$, on obtient :

Théorème 6. Si $G(z) \in S(0, \beta)$, on a

$$[g(z) \rightarrow {}_1G(z)] \Rightarrow [\mathcal{J}g(z) \rightarrow {}_{r_\mu(0;\beta)}\mathcal{J}G(z)]$$

où

$$r_\mu(0, \beta) = \min \{r'(\mu, 0, \beta), r_c(0, \beta)\}$$

r_c est défini par (3.9) et

$$r'(\mu, 0, \beta) = \sqrt{\frac{3 + 4 \cos \beta + 2\mu \sin^2 \beta + \mu^2 - \sqrt{(3 + 4 \cos \beta + 2\mu \sin^2 \beta + \mu^2)^2 - (1 + \mu)^4 + 4\mu(1 + \mu)^2 \cos^2 \beta}}{(1 + \mu)^2 - 4\mu \cos^2 \beta}}$$

Dans les théorèmes précédents nous avons supposé $\mu \geq 0$. Nous établirons maintenant un lemme qui permettra de démontrer des théorèmes analogues pour les majorantes appartenant aux classes $S(a, 0)$ ou $S(0, 0)$, si μ est un nombre réel quelconque, $\mu \neq -1$.

Lemme. Si $G(z) \in S(a, 0)$, la fonction $\mathcal{J}G(z) = \mu G(z) + zG'(z)$ est univalente dans le cercle $|z| \leq R_\mu$, où

$$R_\mu = \begin{cases} \frac{-(1 + \mu)}{1 - 2a - \mu} & \text{si } \mu < -1 \\ \frac{1 + \mu}{1 - 2a - \mu} & \text{si } \mu \in (-1, -a) \\ 1 & \text{si } \mu \geq -a. \end{cases}$$

Démonstration. Nous profiterons de la définition donnée par Kaplan (voir [3]), en vertu de laquelle une fonction $f(z)$ est univalente presque convexe dans le cercle $|z| < r$, s'il existe une fonction convexe $\varphi(z)$ telle que

$$(3.10) \quad \operatorname{Re}\{f'(z)/\varphi'(z)\} > 0 \text{ pour } |z| < r.$$

Nous allons prouver que la fonction $\mathcal{J}G(z)$ resp. $-\mathcal{J}G(z)$ est univalente dans un cercle. Nous utiliserons dans ce but la fonction α -convexe $G(z)$.

$\mathcal{J}G(z)$ étant définie par (2.2), la condition (3.10) prend pour la fonction $\mathcal{J}G(z)$ resp. $-\mathcal{J}G(z)$ l'une des deux formes

$$(3.11) \quad \operatorname{Re}\left\{\frac{\frac{d}{dz}\mathcal{J}G(z)}{G'(z)}\right\} > 0$$

resp.

$$(3.12) \quad \operatorname{Re}\left\{\frac{\frac{d}{dz}\mathcal{J}G(z)}{G'(z)}\right\} < 0,$$

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\frac{d}{dz}\mathcal{J}G(z)}{G'(z)}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\mu + 1 + \frac{zG''(z)}{G'(z)}\right\}.$$

En profitant de la limitation bien connue de $\operatorname{Re}\{1 + zG''(z)/G'(z)\}$ pour la classe $S(\alpha, 0)$ on obtient

$$(3.13) \quad \mu + \frac{1 + r^2(1 - 2\alpha) - 2r(1 - \alpha)}{1 - r^2} \leq \operatorname{Re}\left\{\mu + 1 + \frac{zG''(z)}{G'(z)}\right\} \\ \leq \mu + \frac{1 + r^2(1 - 2\alpha) - 2r(1 - \alpha)}{1 - r^2}.$$

Pour $\mu > -1$ la condition (3.10) sera satisfaite si la condition (3.11) est remplie; par contre, si $\mu < -1$ la condition (3.10) est remplie si (3.12) a lieu.

Soit $\mu > -1$. En vertu du premier membre de la limitation (3.13) la condition (3.11) sera remplie si

$$\mu + \frac{1 + r^2(1 - 2\alpha) - 2r(1 - \alpha)}{1 - r^2} > 0.$$

Cette dernière inégalité donne, après quelques calculs,

$$(3.14) \quad r^2(1 - 2\alpha - \mu) - 2r(1 - \alpha) + (1 + \mu) > 0.$$

Quand $\mu \geq -\alpha$, l'inégalité (3.14) a lieu pour tout $r < 1$; si $\mu \in (-1, -\alpha)$, l'inégalité (3.14) est remplie pour $r < (1 + \mu)/(1 - 2\alpha - \mu)$, et ainsi l'univalence de $\mathcal{J}G(z)$ dans le cercle $|z| < R_\mu$ est établie pour $\mu > -1$.

Soit maintenant $\mu < -1$.

Le second membre de la limitation (3.13) prouve que la condition (3.12) sera remplie si

$$\mu + \frac{1+r^2+2r(1-a)}{1-r^2} < 0.$$

Après quelques transformations cette inégalité donne

$$r^2(1-2a-\mu)+2r(1-a)+(1+\mu) < 0.$$

Cette dernière inégalité est vérifiée pour $r < -(1+\mu)/(1-2a-\mu)$ et le lemme est ainsi démontré.

En s'appuyant sur ce lemme et sur le théorème 3 on peut énoncer pour la classe $S(a, 0)$ les théorèmes suivants:

Théorème 7. Si $G(z) \in S(a, 0)$, on a

$$[g(z) \rightarrow {}_1G(z)] \Rightarrow [zg'(z) \rightarrow {}_{r_0}zG'(z)]$$

où

$$(3.15) \quad r_0 = r_0(a, 0) = \begin{cases} \frac{2-a-\sqrt{a^2-2a+3}}{1-2a} & \text{si } a \neq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \text{si } a = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Théorème 8. Si $G(z) \in S(a, 0)$, on a

$$[g(z) \rightarrow {}_1G(z)] \Rightarrow [(zg(z))' \rightarrow {}_{r_1}(zG(z))']$$

où

$$(3.16) \quad r_1 = r_1(a, 0) = \begin{cases} \frac{a-2+\sqrt{a^2+4}}{2a} & \text{si } a \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

Théorème 9. Si $G(z) \in S(a, 0)$, on a, pour tout $\mu \neq -1$ réel

$$[g(z) \rightarrow {}_1G(z)] \Rightarrow [\mathcal{J}g(z) \rightarrow {}_{r_{\mu(a,0)}}\mathcal{J}G(z)]$$

où

$$(3.17) \quad r_{\mu}(a, 0) = \begin{cases} \frac{a-2+\sqrt{\mu^2+2a\mu+3-2a+a^2}}{1-2a-\mu} & \text{si } \mu < -1 \\ \frac{1-a}{2-a} & \text{si } \mu > -1, \mu = 1-2a, \\ \frac{2-a-\sqrt{\mu^2+2a\mu+3-2a+a^2}}{1-2a-\mu} & \text{si } \mu > -1, \mu \neq 1-2a. \end{cases}$$

A cause de la grande importance de la classe $S^c = S(0, 0)$ des fonctions convexes nous mettrons en évidence les théorèmes correspondants pour cette classe sous forme des corollaires suivants:

Corollaire 1. Si $G(z) \in S^c$, on a

$$[g(z) \rightarrow_1 G(z)] \Rightarrow [zg'(z) \rightarrow_{r_0} zG'(z)]$$

où

$$(3.18) \quad r_0 = 2 - \sqrt{3}.$$

Corollaire 2. Si $G(z) \in S^c$, on a

$$[g(z) \rightarrow_1 G(z)] \Rightarrow [(zg(z))' \rightarrow_{r_1} (zG(z))']$$

où

$$(3.19) \quad r_1 = \frac{1}{2}.$$

Corollaire 3. Si $G(z) \in S^c$, on a, pour tout $\mu \neq -1$ réel,

$$[g(z) \rightarrow_1 G(z)] \Rightarrow [\mathcal{J}g(z) \rightarrow_{r_\mu} \mathcal{J}G(z)]$$

où

$$(3.20) \quad r_\mu = \frac{\sqrt{7 + \mu^2 - 4\sqrt{3 + \mu^2}}}{|1 - \mu|}.$$

Pour établir les théorèmes 7, 8 et 9, ainsi que les corollaires qui en découlent, il suffit de remarquer que le rayon d'univalence de $\mathcal{J}G(z)$ déterminé dans le lemme pour $G(z) \in S(\alpha, 0)$ est un nombre qui pour tout $\alpha \in (-1, 0)$ et $\mu \neq -1$, surpasse chacun des nombres (3.15), (3.16), (3.17), (3.18), (3.19) et (3.20).

De plus, les fonctions de la classe $S(\alpha, 0)$ sont convexes pour tout $r < 1$. Par conséquent les rayons correspondants de subordination annoncés dans les théorèmes ou dans leurs corollaires s'obtiennent par une substitution convenable à partir du rayon $r'(\mu, \alpha, \beta)$ défini par la formule (3.3).

4. Dans ce paragraphe nous allons montrer que les résultats établis dans les théorèmes 4, 7, 8, 9 et les corollaires 1, 2 et 3 sont exacts.

Les fonctions $G(z)$, pour lesquelles $w = 1 + zG''(z)/G'(z)$ est situé sur la circonférence du cercle (3.5) sont de la forme

$$G(z, t) = -e^{it} \frac{(1 - ze^{-it})2e^{-i\beta} \alpha \cos \beta - e^{-2i\beta} - 1}{2e^{-i\beta} \alpha \cos \beta - e^{-2i\beta}}, \quad t \in (-\pi, \pi).$$

Pour ces fonctions on a

$$(4.1) \quad w(z) = \frac{ze^{-it}(2e^{-i\beta} \alpha \cos \beta - e^{-2i\beta}) - 1}{ze^{-it} - 1}.$$

La fonctionnelle (4.1), en tant que fonction de la variable $\xi = ze^{-it}$ est une homographie dont le pôle se trouve sur la circonférence $|\xi| = 1$, l'image du cercle $|\xi| \leq r'(\mu, \alpha, \beta)$ est donc contenue dans l'intérieur de l'image de tout cercle $|\xi| < r$ si $r > r'(\mu, \alpha, \beta)$. Par conséquent si $r > r'(\mu, \alpha, \beta)$ la condition (2.1), qui est nécessaire dans ces théorèmes, ne peut être remplie. Il en résulte que partout où $r_\mu(\alpha, \beta) = r'(\mu, \alpha, \beta)$, c'est-à-dire où $r'(\mu, \alpha, \beta) < r_c(\alpha, \beta)$ le résultat est exact.

Pour ce qui concerne l'exactitude des résultats établis dans les théorèmes 3, 5 et 6, le problème reste ouvert.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Alenicyn, Yu. E. (Ю. Е. Аленицын), *Об однолистных мажорантах*, Mat. Sb., 26 (1950), 57-74.
- [2] Bielecki, A., Lewandowski, Z., *Sur un théorème concernant les fonctions univalentes linéairement accessibles de M. Biernacki*, Ann. Polon. Math., 12 (1962), 61-63.
- [3] Kaplan, W., *Close-to-convex Schlicht Functions*, Michigan Math. J., 1,2 (1952), 1969-185.
- [4] Libera, R. I. and Ziegler, M. R., *Regular functions $f(z)$ for which $zf'(z)$ is α -spiral*, Trans. Amer. Math. Soc., 166 (1972), 361-368.
- [5] Robinson, R. M., *Univalent Majorants*, Trans. Amer. Math. Soc., 61 (1947), 1-35.
- [6] Zmorovič, V. A. (В. А. Зморобич), *О радиусе ν -спиральности θ -спиральных функций в круге $|z| < 1$* , Dopovidi Akad: Nauk Ukrain. RSR, 10 (1965), 1202-1205.

STRESZCZENIE

W pracy tej wypowiedziano i udowodniono 9 twierdzeń, z których dwa pierwsze stanowią uogólnienie twierdzeń Alenicyna na klasy funkcji niekoniecznie jednolistnych, zaś pozostałe dotyczą relacji $(g(z), G(z), 1) \Rightarrow (Jg(z), JG(z), r_\mu(\alpha, \beta))$ ($Jf(z) = \mu f(z) + zf'(z)$, μ — liczba rzeczywista) dla majorant $G(z) \in S(\alpha, \beta)$.

РЕЗЮМЕ

В работе доказываются девять теорем, из которых две являются обобщением теорем Аленицына на классы необязательно однолистных функций, а другие относятся к реляции $(g(z), G(z), 1) \Rightarrow (Jg(z), JG(z), r_\mu(\alpha, \beta))$ ($Jf(z) = \mu f(z) + zf'(z)$, μ -постоянная действительная) для мажорант $G(z) \in S(\alpha, \beta)$.