ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN – POLONIA
VOL. XXV, 1 SECTIO A 1971

Instytut Ekonomii Politycznej i Planowania UMCS

FRANCISZEK BOGOWSKI et ZOFIA STANKIEWICZ

Sur la majoration modulaire des fonctions et l'inclusion des domaines dans la classe $S_{\frac{1}{2}}^*$

Majoryzacja modułowa funkcji a zawieranie się obszarów w klasie $S_{\frac{1}{2}}^*$

Мажорация функций по модулю и содержание областей в классе $S_{1/2}^*$

Soit T une sous-classe compacte de la classe S des fonctions $F(z) = z+A_2z^2+ \ldots$ holomorphes et univalentes dans le cercle K_1, où $K_r = \{z: |z| < r\}$.

Désignons par H_1 la classe des fonctions $f(z)$ holomorphes dans le cercle K_1 et satisfaisant aux conditions

$$f(0) = 0,\ f'(0) \geqslant 0,$$

et par H_n $(n \geqslant 2)$ la sous-classe de la classe H_1 des fonctions $f(z)$ qui admettent dans le cercle K_1 le développement

$$f(z) = a_nz^n + a_{n+1}z^{n+1} + \ldots$$

Soient respectivement N_1 la classe des fonctions $\omega(z)$ holomorphes dans K_1 et satisfaisant aux conditions

$$\omega(0) \geqslant 0,\ |\omega(z)| \leqslant 1 \text{ pour } |z| < 1,$$

et $N_n (n \geqslant 2)$ la sous-classe de la classe N_1 des fonctions $\omega(z)$ admettant dans le cercle K_1 le développement

$$\omega(z) = a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n + \ldots$$

Par O_r^n et $D(r, R, T)$ désignons respectivement les ensembles:

$$O_r^n = \{w: w = \omega(z),\ |z| \leqslant r,\ \omega \in N_n\},$$

$$D(r, R, T) = \left\{w: w = \frac{F(z)}{F(\zeta)},\ |z| = r,\ |\zeta| = R,\ F \in T\right\}.$$

Si l'on a, pour $z \in K_1$, l'inégalité

$$|f(z)| \leqslant |F(z)|,$$

on dit que la fonction $f(z)$ est subordonnée en module à la fonction $F(z)$ dans le cercle K_1 et on écrit

$$|f(z)| \leqslant_1 |F(z)|.$$

Cela signifie qu'il existe une fonction $\omega(z) \in N_1$ telle que

$$f(z) = \omega(z) \cdot F(z).$$

Remarquons que si $f(z) \in H_n$, $F(z) \in T$, $\omega(z)$ appartient nécessairement à la classe N_n.

D'autre part, si l'on a la relation

$$f(z) = F(\omega(z)) \text{ pour } |z| < r,$$

où $|\omega(z)| \leqslant |z| < r$, on dit que la fonction $f(z)$ est subordonnée en domaine à la fonction $F(z)$ dans le cercle K_r et on écrit

$$f(z) \dashv_r F(z).$$

Si $f(z) \in H_n$, $F \in T$, on a $\omega(z) \in N_{n+1}$.

Le problème général de la dépendance entre la subordination modulaire des fonctions $f(z)$ et $F(z)$ dans le cercle K_1 et l'inclusion des images des cercles K_r par les fonctions $f(z)$ et $F(z)$ a été étudié dans le travail [1]. Le théorème suivant, entre autres, y a été démontré:

Théorème 1. *Si $f(z) \in H_n$, $F(z) \in T$ et $|f(z)| \leqslant_1 |F(z)|$, on a, indépendamment du choix des fonctions $f(z)$ et $F(z)$,*

$$f(K_{R_n(r)}) \subset F(K_r)$$

pour tout $r \in (0, 1\rangle$, où $R_n(r)$ peut être déterminé comme il suit:

$$R_n(r) = \sup_{R \leqslant r} \{R : O_R^n \cap D(r, R, T) = \emptyset\}.$$

Le nombre $R_n(r)$ est le meilleur possible.

Dans le présent travail nous allons indiquer une application du théorème 1 pour un choix particulier de la classe T.

Désignons par S_a^*, où $a \in \langle 0, 1)$, la classe des fonctions $F(z)$ holomorphes et univalentes dans le cercle K_1 satisfaisant aux conditions

$$F(0) = 0, F'(0) = 1, \ \mathrm{Re}\,\frac{zF'(z)}{F(z)} > a.$$

En posant $T = S_{1/2}^*$, $n = 1$, on obtient le théorème suivant:

Théorème 2. *Si* $|f(z)| \leqslant_1 |F(z)|$, *on a, indépendamment du choix des fonctions* $f(z) \in H_1$, $F(z) \in S^*_{1/2}$,

$$f(K_{R_1(r, S^*_{1/2})}) \subset F(K_r),$$

où

$$R_1(r, S^*_{1/2}) = \min\left\{r, \frac{\sqrt{5r^2+4r}-r}{2(1+r)}\right\}$$

$$= \begin{cases} r & \textit{pour } r \in (0, r_0\rangle \\ \dfrac{\sqrt{5r^2+4r}-r}{2(1+r)} & \textit{pour } r \in \langle r_0, 1\rangle \end{cases}.$$

Le nombre $r_0 = \sqrt{2}-1$ *est la racine positive de l'équation* $r^2+2r-1 = 0$ *dans l'intervalle* $(0, 1\rangle$.
Pour $r \in (0, 1\rangle$ *fixé le nombre* $R_1(r, S^*_{1/2})$ *est le meilleur possible.*

Puisque

$$\lim_{r\to 1} R_1(r, S^*_{1/2}) = 1/2$$

on obtient le

Corollaire: *Si* $|f(z)| \leqslant_1 |F(z)|$, *on a, indépendamment du choix des fonctions* $f(z) \in H_1$, $F(z) \in S^*_{1/2}$,

$$f(K_{1/2}) \subset F(K_1).$$

Le nombre $1/2$ *est le meilleur possible et est atteinte pour la fonction* $F(z) = \dfrac{z}{1-z} \in S^c \subset S^*_{1/2}$ *où* S^c *designe la classe de la convexes fonctions.*

Démonstration du théorème 2. An posant dans le théorème 1 $T = S^*_{1/2}$, $n = 1$, on obtient

$$R_1(r, S^*_{1/2}) = \sup_{R\leqslant r}\{R: O^1_R \cap D(r, R, S^*_{1/2}) = \emptyset\}.$$

Déterminons maintenant le domaine $D(r, R, S^*_{1/2})$. E. Złotkiewicz a démontré dans le travail [2] que si z, ζ sont des points fixés du cercle K_1 et si la fonction $F(z)$ parcourt la classe S^*_a, la fonctionnelle

$$\left[\frac{\zeta F(z)}{zF(\zeta)}\right]^{\frac{1}{2(1-a)}}$$

parcourt un cercle dont le bord admet l'équation

$$w = \frac{1-e^{-i\theta}\zeta}{1-e^{-i\theta}z}, \quad \theta \in \langle -\pi, \pi\rangle.$$

Remarquons que si $\alpha = 1/2$, la fonctionnelle $\dfrac{F(z)}{F(\zeta)}$ parcourt un cercle dont le bord admet l'équation

$$w = \frac{z}{\zeta}\cdot\frac{1-e^{-i\theta}\zeta}{1-e^{-i\theta}z}, \qquad \theta\in\langle -\pi, \pi\rangle.$$

Après quelques transformations cette équation devient

$$\left|\frac{w-\dfrac{z}{\zeta}}{w-1}\right| = |z|. \tag{1}$$

Si l'on pose maintenant $|z| = re^{i\varphi_1}$, $|\zeta| = Re^{i\varphi_2}$, on a

$$\frac{z}{\zeta} = \frac{r}{R}e^{i(\varphi_2-\varphi_1)} = \frac{r}{R}e^{i\psi}, \quad \psi\in\langle 0, 2\pi\rangle,$$

et

$$\left|\frac{w-\dfrac{r}{R}e^{i\psi}}{w-1}\right| = r. \tag{1'}$$

L'équation (1') représente une famille à un paramètre de circonférences dont l'enveloppe constitue le bord du domaine $D(r, R, S^*_{1/2})$. L'équation (1') peut être mise sous la forme équivalente

$$\Phi(w, \psi) = \operatorname{Re}\left[\log\frac{w-\dfrac{r}{R}e^{i\psi}}{w-1}\right] - \log r = 0$$

et on trouvera l'équation de l'enveloppe en éliminant le paramètre ψ entre les équations du système

$$\left|\begin{aligned} &\Phi(w, \psi) = 0\\ &\Phi'_\psi(w, \psi) = \operatorname{Re}\left[\frac{i}{1-\dfrac{R}{r}e^{i\psi}w}\right] = 0\end{aligned}\right. \tag{2}$$

La seconde des équations (2) devient, après quelques transformations,

$$\frac{i}{1-\dfrac{R}{r}e^{-i\psi}w} - \frac{i}{1-\dfrac{R}{r}e^{i\psi}\overline{w}} = 0,$$

d'où

(3) $$e^{i\varphi} = \frac{w}{|w|} \text{ ou bien } e^{i\varphi} = -\frac{w}{|w|}.$$

En portant (3) dans (1′) on obtient les deux équations:

(4) $$\left|\frac{w - \frac{r}{R}\cdot\frac{w}{|w|}}{w-1}\right| = r,$$

(5) $$\left|\frac{w + \frac{r}{R}\cdot\frac{w}{|w|}}{w-1}\right| = r.$$

En posant $|w| = \varrho$, $w+\overline{w} = 2\varrho\cos\theta$ on aura les équations (4) et (5) en coordonnées polaires. Ces équations deviendront:

(6) $$\left(\varrho - \frac{r}{R}\right)^2 = r^2(\varrho^2 - 2\varrho\cos\theta + 1)$$

(7) $$\left(\varrho + \frac{r}{R}\right)^2 = r^2(\varrho^2 - 2\varrho\cos\theta + 1).$$

L'équation (7) mène à une contradiction, tandis que l'équation (6) ordonnée devient:

$$(1-r^2)\varrho^2 - 2\frac{r}{R}(1 - rR\cos\theta)\varrho + \frac{r^2}{R^2}(1-R^2) = 0,$$

d'où

(8) $$\varrho_1(\theta) = \frac{r}{R(1-r^2)}\left[1 - rR\cos\theta - \sqrt{(1-rR\cos\theta)^2 - (1-r^2)(1-R^2)}\right]$$

(9) $$\varrho_2(\theta) = \frac{r}{R(1-r^2)}\left[1 - rR\cos\theta + \sqrt{(1-rR\cos\theta)^2 - (1-r^2)(1-R^2)}\right]$$

où $\theta \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

On voit donc que le bord du domaine $D(r, R, S^*_{1/2})$ est formé de deux courbes d'équations (8) et (9). Puisque pour $\theta \in \langle 0, 2\pi\rangle$ on a toujours

$$\varrho_1(\theta) < \varrho_2(\theta)$$

le fomaine $D(r, R, S^*_{1/2})$ est un domaine doublement connexe dont les bords sont déterminés par (8) et (9).

L'ensemble $O_R^1 = \{w: w = \omega(z), |z| \leqslant R, \omega \in N_1\}$ est un „domaine de Rogosinski". L'équation polaire du bord de ce domaine est

$$\varrho(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2R}\left[-(1-R^2)\sin\theta + \sqrt{4R^2+(1-R^2)^2\sin^2\theta}\right], & \theta \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle \\ R, & \theta \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right\rangle \\ \frac{1}{2R}\left[(1-R^2)\sin\theta + \sqrt{4R^2+(1-R^2)^2\sin^2\theta}\right], & \theta \in \left\langle \frac{3}{2}\pi, 2\pi\right\rangle. \end{cases}$$

Les domaines O_R^1 et $D(r, R, S_{1/2}^*)$ étant symétriques par rapport à l'axe reéel il suffira de considérer le demi-plan supérieur.

La condition $O_R^1 \cap D(r, R, S_{1/2}^*) = \emptyset$ est équivalente à la condition

$$\varrho_1(\theta) > \varrho(\theta)$$

pour tout $\theta \in \langle 0, \pi\rangle$.

Pour $\theta \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi\right\rangle$ cette inégalité a la forme

$$\varrho_1(\pi) > R,$$

puisque la fonction $\varrho_1(\theta)$ est décroissante pour $\theta \in \langle 0, \pi\rangle$ et admet sa plus petite valeur pour $\theta = \pi$

$$\varrho_1(\pi) = \frac{r(1-R)}{R(1+r)}$$

et que $\varrho(\theta) = R$ pour $\theta \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi\right\rangle$. Il en résulte que les domaines O_R^1 et $D(r, R, S_{1/2}^*)$ n'auront pas de points communs dans le second quadrant si

$$\frac{r}{R}\cdot\frac{1-R}{1+r} > R.$$

Cette condition est remplie pour tous les R tels que

$$R < R_1(r, S_{1/2}^*) = \frac{-r+\sqrt{5r^2+4r}}{2(1+r)},$$

où $R_1(r, S_{1/2}^*)$ est la racine positive unique de l'équation

$$\frac{r}{R}\cdot\frac{1-R}{1+r} = R.$$

Nous allons maintenant montrer que si $R < r$ et $R < R_1(r, S^*_{1/2})$ on a $\varrho_1(\theta) > \varrho(\theta)$ pour $\theta \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. L'inégalité $\varrho_1(\theta) > \varrho(\theta)$ est équivalente à la suivante:

$$\ln\frac{\varrho_1(\theta)}{\varrho(\theta)} > 0.$$

Considérons la fonction

$$G(\theta) = \ln\frac{\varrho_1(\theta)}{\varrho(\theta)}, \quad \theta \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle.$$

On a

$$G'(\theta) = \frac{\varrho_1'(\theta)}{\varrho_1(\theta)} - \frac{\varrho'(\theta)}{\varrho(\theta)} = \frac{-rR\sin\theta}{\sqrt{(1-rR\cos\theta)^2-(1-r^2)(1-R^2)}} +$$
$$+\frac{1-R^2\cos\theta}{\sqrt{4R^2+(1-R^2)^2\sin^2\theta}}$$

L'équation $G'(\theta) = 0$ prend, après quelques transformations, la forme:

$$2rR(1-R^2)^2\cos^3\theta - [(1-R^2)^2(r^2+R^2+R^2r^2)+4r^2R^2]\cos^2\theta + + R^2r^2(1+R^2)^2 = 0. \tag{10}$$

En posant $\cos\theta = u$ on voit que le premier membre de l'équation (10) est un polynome $W(u)$ du troisième degré tel que

$$\lim_{u\to-\infty} W(u) = -\infty,\ W(0) > 0,\ W(1) < 0,\ \lim_{u\to+\infty} W(u) = +\infty.$$

Il en résulte que dans chacun des intervalles $(-\infty, 0), (0, 1), (1, +\infty)$ le polynome $W(u)$ a exactement une racine. Puisque pour $\theta \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ on a $u \in \langle 0, 1\rangle$, l'équation (10) n'a qu'une seule racine θ_0 dans l'intervalle $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. Comme $G'(0) > 0$, $G'\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ et $G(0) > 0$, la fonction $G(\theta)$ admet un maximum local positif pour $\theta = \theta_0$. Par conséquent la fonction $G(\theta)$ est croissante pour $\theta \in \langle 0, \theta_0\rangle$ et décroissante pour $\theta \in \left\langle \theta_0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. On vérifie aisément que $G\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ pour $R < R_1(r, S^*_{1/2})$ et $R < r$, donc $G(\theta) = \ln\frac{\varrho_1(\theta)}{\varrho(\theta)} > 0$ pour tout $\theta \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$, ce qui prouve que les domaines

O_R^1 et $D(r, R, S_{1/2}^*)$ sont disjoints pour $R < R_1(r, S_{1/2}^*)$. Pour $R = R_1(r, S_{1/2}^*)$ ces domaines se touchent au point $w = -R$. Si $r \leqslant r_0$, où $r_0 = \sqrt{2}-1$ est la racine réelle unique de l'équation

$$r^2+2r-1 = 0 \text{ dans l'intervalle } (0, 1),$$

la subordination modulaire des fonctions $f(z) \in H_1$ et $F(z) \in S_{1/2}^*$ dans le cercle K_1 implique, comme il a été prouvé dans le travail [2], la condition

$$f(K_r) \subset F(K_r).$$

Dans ce cas

$$R_1(r, S_{1/2}^*) = r, \text{ donc}$$

$$R_1(r, S_{1/2}^*) = \begin{cases} r & \text{pour } r \in \langle 0, r_0 \rangle \\ \dfrac{-r+\sqrt{5r^2+4r}}{2(1+r)} & \text{pour } r \in \langle r_0, 1 \rangle. \end{cases}$$

En appliquant le théorème 1 dans le cas où $f(z) \in H_n$, $n \geqslant 2$, et $F(z) \in S_{1/2}^*$, on obtient le théorème suivant:

Théorème 3. *Si* $|f(z)| \leqslant_1 |F(z)|$, *on a, indépendamment du choix des fonctions* $f(z) \in H_n$, $n \geqslant 2$, $F(z) \in S_{1/2}^*$,

$$f(K_{R_n(r, S_{1/2}^*)}) \subset F(K_r)$$

pour tout $r \in (0, 1\rangle$, *où* $R_n(r, S_{1/2}^*)$ *est la racine unique de l'équation*

$$(1+r)R^n+rR-r = 0. \tag{11}$$

La constante $R_n(r, S_{1/2}^*)$ *est exacte.*

Démonstration. En vertu du théorème 1

$$R_n(r, S_{1/2}^*) = \sup_{R \leqslant r} \{R: O_R^n \cap D(r, R, S_{1/2}^*) = \emptyset\}.$$

Si $f(z) \in H_n$, $n \geqslant 2$, le domaine O_R^n est un cercle de centre à l'origine et de rayon R^{n-1}. La condition $O_R^n \cap D(r, R, S_{1/2}^*) = \emptyset$ est équivalente à l'inégalité

$$\frac{r}{R} \cdot \frac{1-R}{1+r} > R^{n-1},$$

qui est vérifiée pour tous les R tels que $R < R_n(r, S_{1/2}^*)$, où $R_n(r, S_{1/2}^*)$ est la racine positive unique de l'équation

$$\frac{r}{R} \cdot \frac{1-R}{1+r} = R^{n-1}.$$

Cette équation est équivalente à l' équation (11). Le nombre $R_n(r, S^*_{1/2})$ est exact. Pour $R = R_n(r, S^*_{1/2})$ les domaines O^n_R et $D(r, R, S^*_{1/2})$ se touchent par leurs bords au point $w = -R^{n-1}$.

RÉFÉRENCES

[1] Z. Lewandowski, J. Stankiewicz, *Majoration modulaire des fonctions et inclusion des domaines*. Bull. Acad. Polon. Sci., 10(1971), 917-922.

[2] E. Złotkiewicz, *Subordination and convex majorants*. Folia Societatis Scientiarum Lublinensis, vol. 2 (1962), 97–99.

STRESZCZENIE

W tym artykule dowodzi się następującego twierdzenia: *Jeżeli funkcja* $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$, $a_1 \geqslant 0$, *jest holomorficzna w* K_1 ($K_r = \{z: |z| < r\}$), *a funkcja* $F(z) = z + A_2 z^2 + \ldots$ *spełnia warunek* $\mathrm{Re}\dfrac{zF'(z)}{F(z)} > \dfrac{1}{2}$ *i ponadto* $|f(z)| \leqslant |F(z)|$ *dla* $z \in K_1$ *to dla każdego* $r \in (0, 1\rangle$

$$f(K_{R_1(r, S^*_{1/2})}) \subset F(K_r)$$

niezależnie od wyboru funkcji $f(z)$ *i* $F(z)$, *gdzie*

$$R_1(r, S^*_{1/2}) = \min\left(r, \frac{\sqrt{5r^2+4r}-r}{2(1+r)}\right) = \begin{cases} r & \text{dla } r \in (0, r_0\rangle \\ \dfrac{\sqrt{5r^2+4r}-r}{2(1+r)} & \text{dla } r \in \langle r_0, 1\rangle \end{cases}$$

Liczba r_0 *jest dodatnim pierwiastkiem równania* $r^2 + 2r - 1 = 0$.

Wynika stąd, że jeżeli $|f(z)| \leqslant |F(z)|$ dla $z \in K_1$, to niezależnie od wyboru funkcji $f(z)$ i $F(z)$ mamy $f(K_{1/2}) \subset F(K_1)$.

РЕЗЮМЕ

В работе доказаны следующие теоремы: *если функция* $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$, $a_1 \geqslant 0$ *голоморфна в круге* K_1 ($K_r = \{z: |z| < r\}$), *а функция* $F(z) = z + A_2 z^2 + \ldots$ *выполняет условие*

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zF'(z)}{F(z)}\right\} > \frac{1}{2}$$

и кроме того $|f(z)| \leqslant |F(z)|$ *для* $z \in K_1$, *то для каждого* $r \in (0, 1\rangle$ $f(K_{R_1(r, S^*_{1/2})}) \subset F(K_r)$ *независимо от выбора функций* $f(z)$ *и* $F(z)$, *где*

$$R_1(r, S^*_{1/2}) = \min\left(r, \frac{\sqrt{5r^2+4r}-r}{2(1+r)}\right) = \begin{cases} r & \text{для } r \in (0, r_0\rangle \\ \dfrac{\sqrt{5r^2+4r}-r}{2(1+r)} & \text{для } r \in \langle r_0, 1). \end{cases}$$

Число r_0 *является положительным корнем уравнения*

$$r^2+2r-1 = 0.$$

Следовательно, если $|f(z)| \leqslant |F(z)|$ *для* $z \in K_1$, *то независимо от выбора* функций $f(z)$ и $F(z)$, имеем $f(K_{1/2}) \subset F(K_1)$.