ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XXII/XXIII/XXIV, 28 SECTIO A 1968/1969/1970

Mathematisches Institut der Universität, Halle (Saale), Deutsche Demokratische Republik

WOLFGANG TUTSCHKE

Stammfunktionen komplexwertiger Funktionen als Lösungen spezieller komplexer Differentialgleichungen

Całki pewnych specjalnych równań różniczkowych w dziedzinie zespolonej

Интегралы некоторых специальных дифференциальных уравнений в комплексной области

Bekanntlich versteht man in der klassischen (holomorphen) Funktionentheorie unter einer Stammfunktion F von f eine Funktion, für die

$$\frac{dF}{dz} = f$$

ist. Natürlich kann man auf diese Weise nur für holomorphe Funktionen Stammfunktionen konstruieren, da aus der Holomorphie von F sofort die Holomorphie von $f = dF/dz$ folgt. Will man für allgemeinere komplexwertige Funktionen Stammfunktionen konstruieren, muß man anstelle der komplexen Differentiation d/dz mit den partiellen komplexen Differentiationen $\partial/\partial z$ und $\partial/\partial z^*$ arbeiten. Dann versteht man unter einer Stammfunktion im allgemeinen Sinn zu f eine Funktion F, aus der man f mit Hilfe der Differentiationen $\partial/\partial z, \partial/\partial z^*$ gewinnt. Zu diesem Sinn ist beispielsweise eine Lösung F der inhomogenen Cauchy-Riemannschen Differentialgleichung

$$\frac{dF}{dz^*} = f$$

eine Stammfunktion von f. Eine spezielle Lösung F_0 dieser komplexen Differentialgleichung wird durch die Hilbert-Transformierte F_0 von f,

$$F_0(z) = -\frac{1}{\pi}\int\int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta,$$

gegeben. Jede andere Lösung F unterscheidet sich von F_0 nach einem Satz von I. N. Vekua ([1]) um einen holomorphen Summanden. Im Vortrag soll nun die Frage nach der Existenz von Stammfunktionen nicht holomorpher Funktionen ganz allgemein behandelt werden.

1. Lokale Existenz

Zunächst werden einige Aussagen genannt, die die lokale Existenz einer Stammfunktion F zu einer komplexwertigen Funktion f beinhalten. Beweisen lassen sich diese Aussagen unter Verwendung der Theorie vollständiger Differentialgleichungssysteme; aus beweistechnischen Gründen wird herbei vorausgesetzt, daß die betrachteten Funktionen lokale Potenzreihendarstellungen in den reellen Variablen x, y $(z = x + iy)$ besitzt. Dann gilt (vgl. [2]):

Satz 1. *Zu vorgegebenem f gibt es stets ein F, so daß*

$$f = \lambda \frac{\partial F}{\partial z} + \sigma \frac{\partial F}{\partial z^*} + \varkappa F$$

ist (λ, σ, $\varkappa$ sind fest gewählte Funktionen, $|\lambda| = |\sigma|$). Dabei ist F eindeutig bestimmt, wenn die Werte von F auf einer analytischen Kurve γ vorgeschrieben werden.

Spezialfall: *Zu jedem f gibt es genau ein F, so daß $f = \partial F/\partial z$ ist, wobei $F = 0$ auf γ ist.*

Satz 2. *Werden λ, μ beliebig gewählt und erfüllt f ein gewisses lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung, so gibt es zu f ein F (für das der Funktionswert in einem Punkt z_0 vorgeschrieben werden kann), so daß gilt $f = \lambda \partial F/\partial z$ und wobei F die Nebenbedingung*

$$\frac{\partial F}{\partial z^*} = \mu \frac{\partial F}{\partial z}$$

erfüllt.

Im Spezialfall $\mu = 0$, $\lambda = 1$ ist das erwähnte lineare Differentialgleichungssystem das Cauchy-Riemannsche System.

Satz 3. *Zu gegebenem f gibt es ein F, so daß*

$$f = \lambda \frac{\partial F}{\partial z} + \varkappa F$$

mit vorgeschriebenen Funktionen λ, $\varkappa$ gilt. Dabei kann F so gewählt werden, daß F auf einer analytischen Kurve eine dort vorgegebene Nebenbedingung

$$\frac{\partial F}{\partial z^*} = \mu \frac{\partial F}{\partial z} + \nu F$$

erfüllt.

In der Theorie der nicht holomorphen Funktionen ist es vorteilhaft, die nicht holomorphen Funktionen auf holomorphe zurückzuführen. Auch bei der Frage nach der Existenz von Stammfunktionen gibt es Zusammenhänge zwischen beliebigen komplexwertigen Funktionen und holomorphen Funktionen. Beispielsweise gilt:

Satz 4. *Zu vorgegebenem f ($f \neq 0$) gibt es eine holomorphe Funktion F, so daß*

$$f = \lambda \frac{\partial F}{\partial z} + \varkappa F$$

ist. Dabei ist λ und $\varkappa$ auf einer analytischen Kurve vorschreibbar.

Satz 5. *Zu vorgegebenem f gibt es eine holomorphe Funktion F so daß $f = \lambda \partial F / \partial z$ ist. Hierbei ist λ auf einer analytischen Kurve γ vorschreibbar.*

Als Spezialfall von Satz 3 gilt

Satz 6. *Zu vorgegebenem f gibt es ein F, so daß $f = \partial F / \partial z$ gilt und wobei $\partial F / \partial z^* = 0$ auf einer analytischen Kurve ist.*

2. Globale Konstruktionen

Nach 1. lassen sich lokal Stammfunktionen konstruieren. Ist f in G vorgegeben., so gibt es insbesondere zu jedem Punkt von G eine Umgebung U und darin eine Funktion F, so daß $f = \partial F / \partial z$ ist. Ist F_i die zu U_i und F_j die zu U_j gehörende Funktion, so ist in $U_i \cap U_j$

$$\frac{\partial (F_i - F_j)}{\partial z} = f - f = 0$$

Das bedeutet: in $U_i \cap U_j$ unterscheiden sich F_i und F_j um eine antiholomorphe Funktion. Daher ergibt sich eine zum Problem Cousin I der mehrdimensionalen Funktionentheorie analoge Situation. Dort werden lokal meromorphe Funktionen vorgegeben, deren Differenz im Durchschnitt zweier Umgebungen eine holomorphe Funktion ist. Durch Betrachtung der beim Cousinschen Verfahren verwendeten Kurvenintegrale mit Cauchy-Kern kann man dann zunächst in jedem kompakten Teil von G eine Stammfunktion konstruieren (durch Spiegelung an der reellen Achse kann man erreichen, daß sich F_i und F_j in $U_i \cap U_j$ um eine holomorphe Funktion unterscheiden). Die Konstruktion einer Stammfunktion in ganz G erfolgt dann — wie beim klassischen Cousin I — durch Betrachtung einer Ausschöpfung von G und Anwendung des Rungeschen Approximationssatzes. Insgesamt läßt sich damit zeigen (für mehrfach zusammenhängende Gebiete vgl. man [4]):

Satz 7. *Zu gegebenem f (das z.B. nur als stetig vorausgesetzt zu werden braucht) gibt es stets eine global definierte Stammfunktion F.*

Bemerkung 1. Das Integral

$$F(z) = -\frac{1}{\pi}\iint \frac{f(\zeta)}{\zeta^* - z^*} d\xi\, d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta,$$

liefert nicht bei jedem f eine globale Stammfunktion, da das Integral nicht in jedem Fall zu existieren braucht (verhält sich f am Rand von G hinreichend vernünftig, so existiert das Integral).

Bemerkung 2. Das beschriebene Verfahren zur globalen Konstruktion von Stammfunktionen kann auch angewandt werden, um für allgemeinere komplexe Differentialgleichungssysteme (in einer oder in mehreren komplexen Variablen) globale Lösungen zu konstruieren, auch bei Vorgabe des singulären Verhaltens.

Schließlich kann man noch zeigen (vgl. [3]).

Satz 8. *Ist f holomorphe Funktion in einem mehrfach zusammenhängenden Gebiet, so gibt es stets eine eindeutige Funktion F, die lokal stets Summe einer holomorphen und einer antiholomorphen Funktion ist, so daß $f = \partial F/\partial z$ ist. Beispielsweise ist $F(z) = \log|z|^2$ zu $f(z) = 1/z$ eine derartige eindeutige Stammfunktion.*

Indem man die Theorie der Perioden verallgemeinerter analytischer Funktionen heranzieht, kann man dieses Resultat auch auf gewisse verallgemeinerte analytische Funktionen ausdehnen.

LITERATUR

[1] Vekua, I. N., *Verallgemeinerte analytische Funktionen*, Berlin 1963.

[2] Tutschke, W., *Stammfunktionen komplexwertiger Funktionen*, Sitzungsberichte d. Sächs. Akad. Wiss. Bd. 109, Heft 2 (1970).

[3] —, *Konstruktion eindeutiger Stammfunktionen in mehrfach zusammenhängenden Gebieten*, Mbr. Dt. Akad. Wiss., Bd, 12 (1970), 249–255.

[4] —, *Globale Konstruktion von Stammfunktionen im verallgemeinerten Sinn z komplexwertigen Funktionen*. Sitzungsberichte d. Sächs. Akad. Wiss., Bd. 109u Heft 7 (1972).

STRESZCZENIE

Funkcję zespoloną F nazywamy funkcją pierwotną dla funkcji f, jeśli f jest związana z F zależnością

$$f = \lambda \frac{\partial F}{\partial z} + \sigma \frac{\partial F}{\partial z^*} + \varkappa F \tag{1}$$

gdzie λ, σ, $\varkappa$ są ustalone. Podano 8 twierdzeń dotyczących istnienia i jednoznaczności rozwiązań równania(1).

РЕЗЮМЕ

Комплексная функция F является первоначальной для f, если

$$f = \lambda \frac{\partial F}{\partial z} + \sigma \frac{\partial F}{\partial z^*} + \varkappa F, \tag{1}$$

где $\lambda, \sigma, \varkappa$ — фиксированные функции. В работе дано 8 теорем, касающихся существования и однозначности решения уравнения (1).