

Zespół Matematyki, Wyższa Szkoła Inżynierska, Lublin
Instytut Ekonomii Politycznej i Planowania, Uniwersytet Marii
Curie-Skłodowskiej, Lublin

FILIP FRANCISZEK JABŁOŃSKI et ANDRZEJ WESOŁOWSKI

Sur une famille de fonctions holomorphes dans le cercle unité

O pewnej rodzinie funkcji holomorficznych w kole jednostkowym

О некоторой фамилии голоморфных функций в единичном круге

1. Soient $K_\varrho = \{z: |z| < \varrho\}$ et $\bar{K}_\varrho = \{z: |z| \leq \varrho\}$. Par $\check{S}(\beta, \varphi)$ nous désignons la classe des fonctions $F(z) = z + a_2 z^2 + \dots$, holomorphes dans K_1 et satisfaisant à la condition:

$$(1,1) \quad \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\varphi} \frac{zF'(z)}{F(z)} \right\} \geq \beta \cos \varphi, \quad 0 \leq \beta < 1, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

Cette classe a été introduite, pour $\beta = 0$, par L. Špaček [3] et appelée la classe des fonctions φ -spirales. Elle est composée de fonctions univalentes et constitue une sous-classe de la classe bien connue $\mathcal{S}$. De la définition il résulte que $\check{S}(\beta, \varphi) \subset \check{S}(0, \varphi) \subset \mathcal{S}$. Désignons encore par P la classe des fonctions $p(z) = 1 + p_1 z + \dots$ holomorphes dans K_1 et telles que

$$(1,2) \quad \operatorname{Re} p(z) > 0 \text{ pour } z \in K_1$$

Par $C(\lambda, \gamma, \beta, \varphi)$ nous désignons la classe des fonctions $f(z) = z + b_2 z^2 + \dots$, holomorphes dans K_1 et satisfaisant à la condition:

$$(1,3) \quad \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\gamma} \frac{zf'(z)}{F(z)} \right\} \geq \lambda \cos \gamma \quad 0 \leq \lambda < 1, \quad -\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}, \quad F \in \check{S}(\beta, \varphi).$$

Il est à remarquer que la classe $C(0, 0, 0, 0)$ constitue une sous-classe introduite par Bazilevič [1], de la classe des fonctions presque convexes classiquement normées. Si $\varphi = 0$, la classe $C(\lambda, \gamma, \beta, \varphi)$ constitue la classe, étudiée plus tôt par R. Libera [2], qui constitue pour λ, γ, β fixés, une sous-classe de la classe des fonctions presque convexes.

Dans ce travail nous déterminons le rayon exact de convexité, nous établissons une limitation exacte du module de la dérivée, supérieure et inférieure, dans la classe des fonctions $C(\lambda, \gamma, \beta, \varphi)$ et nous trouvons la fonction extrémale.

Les résultats obtenus dans ce travail fournissent, pour $\varphi \rightarrow 0$ comme corollaires, les résultats correspondants établis par R. Libera [2] pour la classe de fonctions qui a été l'objet de son étude. En imposant des conditions aux limites aux autres paramètres, nous obtenons comme conséquences quelques résultats classiques.

2. Dans ce chapitre, nous nous proposons de déterminer le rayon de convexité exact dans la classe $C(\lambda, \gamma, \beta, \varphi)$ et de trouver une limitation exacte, supérieure et inférieure, du module de la dérivée.

Lemme 1. Si $F(z) \in \check{S}(\beta, \varphi)$, on a, pour $z \in K_r$, $0 \leq r < 1$, la limitation exacte

$$(2,1) \quad \left| \frac{zF'(z)}{F(z)} - \frac{1 + r^2 e^{i\varphi} (e^{i\varphi} - 2\beta \cos \varphi)}{1 - r^2} \right| \leq \frac{2r(1 - \beta) \cos \varphi}{1 - r^2}$$

où

$$(2,2) \quad F(z) = \frac{z}{(1 - z)^{2(1 - \beta) \cos \varphi e^{i\varphi}}} \quad \text{est la fonction extrémale}$$

Démonstration. La définition de la classe $\check{S}(\beta, \varphi)$ implique l'existence d'une fonction $p(z) \in P$ telle que

$$(2,2') \quad e^{i\varphi} \frac{zF'(z)}{F(z)} = (1 - \beta) \cos \varphi \cdot p(z) + \beta \cos \varphi - i \cdot \sin \varphi.$$

En profitant du domaine de variation de la fonction $p(z)$ dans la classe P pour z fixé nous obtenons la conclusion du lemme 1, puisque ce domaine de variation est un cercle dont le diamètre, situé sur l'axe réel, a ses extrémités aux points $\frac{1 - r}{1 + r}$, $\frac{1 + r}{1 - r}$, et que le cercle (2,1) s'obtient du précédent par une homothétie, une translation et une rotation convenable, comme le montre la relation (2.2').

Lemme 2. Si $F(z) \in \check{S}(\beta, \varphi)$, on a, pour $z \in \bar{K}_r$, la limitation exacte

$$(2,3) \quad \frac{1 - r^2 + 2r(1 - \beta) \cos \varphi (r \cos \varphi - 1)}{1 - r^2} \leq \operatorname{Re} \frac{zF'(z)}{F(z)} \\ \leq \frac{1 - r^2 + 2r(1 - \beta) \cos \varphi (r \cos \varphi + 1)}{1 - r^2}$$

$|z| = r$. L'égalité est réalisée, respectivement à gauche et à droite, pour $z = r$ par la fonction

$$(2,4) \quad F_0(z) = \frac{z}{(1 - ze^{i\theta})^{2(1-\beta)\cos\varphi e^{i\varphi}}}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Dans le premier cas, il y a lieu de poser $\theta = \psi$, où $\psi = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1-r}{1+r} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right)$, dans le second, on pose $\theta = t$ où $t = 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{1-r}{1+r} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2} \right) \right]$.

Démonstration. L'inégalité (2,3) résulte directement du lemme 1. Il suffit donc de prouver que l'égalité dans (2,3) est réalisée au point z , $|z| = r$. Nous allons le faire pour $z = r$. Pour la fonction $F_0(z)$

$$F_0(z) = \frac{z}{(1 - ze^{i\theta})^{2(1-\beta)\cos\varphi e^{i\varphi}}} \quad \text{et } \check{S}(\beta, \varphi) \text{ on obtient}$$

$$(2,5) \quad \operatorname{Re} \frac{rF'_0(r)}{F_0(r)} = 1 + 2(1-\beta)\cos\varphi \cdot \frac{r\cos(\varphi + \psi) - r^2\cos\varphi}{1 + r^2 - 2r\cos\psi} \quad \text{où } \theta = \psi$$

De (2,1) on tire

$$(2,6) \quad \min_{F \in \mathcal{S}(\beta, \varphi)} \operatorname{Re} \frac{zF'(z)}{F(z)} = \frac{1 - r^2 + 2r(1-\beta)\cos\varphi(r\cos\varphi - 1)}{1 - r^2}, \quad |z| = r$$

Dans (2,5) on peut choisir θ , jusqu'ici arbitraire, de telle manière que le second membre de (2,5) soit égal au second membre de (2,6). Pour cela, on résout l'équation:

$$(2,7) \quad 1 + 2(1-\beta)\cos\varphi \frac{r\cos(\varphi + \psi) - r^2\cos\varphi}{1 + r^2 - 2r\cos\psi} = \frac{1 - r^2 + 2r(1-\beta)\cos\varphi(r\cos\varphi - 1)}{1 - r^2}$$

Dont on tire, après des transformations simples, bien que pénibles, l'équation:

$$(2,8) \quad \left(x \sqrt{\frac{1+r}{1-r}} - \sqrt{\frac{1-r}{1+r}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^2 = 0 \quad \text{où} \quad x = \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}$$

D'où

$$(2,9) \quad \psi = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1-r}{1+r} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right)$$

ce qui achève la démonstration du premier cas pour la fonction $F_0(z)$, $\theta = \psi$.

Pour démontrer le second cas il suffit, comme précédemment, d'égaliser les seconds membres des égalités:

$$(2,10) \quad \operatorname{Re} \frac{rF'_0(r)}{F_0(r)} = 1 + 2(1-\beta)\cos\varphi \frac{r\cos(\varphi+t) - r^2\cos\varphi}{1-r^2-2r\cos\varphi} \quad \text{où } \theta = t$$

et

$$(2,11) \quad \max_{F \in S(\beta, \varphi)} \operatorname{Re} \frac{zF'(z)}{F(z)} = \frac{1-r^2+2r(1-\beta)\cos\varphi(r\cos\varphi+1)}{1-r^2}, \quad |z| = r$$

que l'on obtient de (2,1). De même que dans le premier cas, on en tire l'équation

$$(2,12) \quad \left(x \sqrt{\frac{1+r}{1-r}} + \sqrt{\frac{1-r}{1+r}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^2 = 0 \quad \text{où } \operatorname{tg} \frac{t}{2} = x$$

Par conséquent

$$(2,13) \quad t = 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{1-r}{1+r} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2} \right) \right].$$

ce qui achève la démonstration du second cas pour la fonction $F_0(z)$, $\theta = \varphi$.

Lemme 3 [2]. Soit $p(z) \in p$, $z \in K_r$, $0 < r < 1$. Pour tout nombre complexe η , $\operatorname{Re} \eta \geq 0$, on a la limitation

$$(2,14) \quad \left| \frac{zp'(z)}{p(z) + \eta} \right| \leq \frac{2r}{(1-r)[1+r+(1-r)\operatorname{Re} \eta]}, \quad |z| = r$$

Théorème 1. Si $f(z) \in C(\gamma, \beta, \gamma, \varphi)$, le rayon r_0 de convexité dans cette classe est la plus petite racine positive de l'équation:

$$(2,15) \quad (1-2\lambda)[2(1-\beta)\cos^2\varphi-1]r^3 - \{1-2(1-\beta)[\cos^2\varphi - \\ - (1-2\lambda)\cos\varphi] + 2(1-\lambda)\}r^2 - [1+2(1-\beta)\cos\varphi]r + 1 = 0$$

La fonction extrémale est de la forme:

$$(2,16) \quad f_0(z) = \int_0^{\pi} \frac{1-z}{(1-ze^{i\psi})^{2(1-\beta)\cos\varphi} e^{i\varphi} [1+z(1-2\lambda)]} dz,$$

pour $\theta = \varphi$, où φ est défini par la relation (2,9).

Démonstration. La définition (1,3) de la classe des fonctions $C(\lambda, \gamma, \beta, \varphi)$ implique que

$$\frac{zf'(z)}{F(z)} = e^{i\gamma}(1-\lambda)\cos\gamma \cdot p(z) + e^{i\gamma}(\lambda\cos\gamma - i\sin\gamma)$$

Prenant les logarithmes et dérivant par rapport à z on a :

$$(2,16') \quad 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{zF''(z)}{F(z)} + \frac{zp'(z)}{p(z) + \eta}, \quad \text{où } \eta = \frac{\lambda}{1-\lambda} - i \frac{1}{1-\lambda} \operatorname{tg} \gamma.$$

Donc

$$(2,17) \quad \operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \geq \min_{F \in \tilde{S}(\beta, \varphi)} \operatorname{Re} \left(\frac{zF'(z)}{F(z)} \right) - \max_{p \in P} \left| \frac{zp'(z)}{p(z) + \eta} \right|.$$

$$\min_{F \in \tilde{S}(\beta, \varphi)} \operatorname{Re} \left(\frac{zF'(z)}{F(z)} \right) \geq \frac{1 - r^2 + 2r(1-\beta) \cos \varphi (r \cos \varphi - 1)}{1 - r^2}, \quad |z| = r < 1$$

ce qui résulte directement de (2,1).

Du lemme 3 on tire, en posant $\operatorname{Re} \eta = \frac{\lambda}{1-\lambda}$,

$$\max_{p \in P} \frac{zp'(z)}{p(z) + \eta} \leq \frac{2r(1-\lambda)}{(1-r)[1+r(1-2\lambda)]}, \quad |z| = r < 1.$$

En tenant compte des deux dernières inégalités et de (2,17) on obtient :

$$(2,18) \quad \operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \geq \frac{1 - r^2 + 2r(1-\beta) \cos \varphi (r \cos \varphi - 1)}{1 - r^2} - \frac{2r(1-\lambda)}{(1-r)[1+r(1-2\lambda)]} \quad |z| = r < 1.$$

Il en résulte, en réduisant au même dénominateur, que dans le cercle K_r les fonctions de la classe $C(\lambda, \gamma, \beta, \varphi)$ sont convexes, r_0 étant la plus petite racine positive de l'équation (2,15). Nous allons maintenant prouver que r_0 est le rayon de convexité dans la classe considérée. Pour cela il suffit de montrer que la fonction (2,16), qui appartient à la classe $C(\lambda, \gamma, \varrho, \varphi)$, ne peut être convexe dans un cercle de rayon plus grand que r_0 . De (2,16) on tire

$$(2,19) \quad 1 + \frac{zf_0''(z)}{f_0'(z)} = \frac{zF_0'(z)}{F_0(z)} - \frac{zp_0'(z)}{p_0(z) + \frac{\lambda}{1-\lambda}}, \quad \text{où}$$

$$F_0(z) = \frac{z}{(1 - ze^{i\theta})^{2(1-\beta) \cos \varphi e^{i\varphi}}} \in \tilde{S}(\beta, \varphi), \quad p_0(z) = \frac{1+z}{1-z}.$$

La définition de la fonction $p(z)$ entraîne

$$(2,20) \quad \left| \frac{rp_0'(r)}{p_0(r) + \frac{\lambda}{1-\lambda}} \right| = \left| \frac{2r(1-\lambda)}{(1-r)[1+r(1-2\lambda)]} \right|,$$

En tenant compte du lemme 2 et des formules (2,19), (2,5), (2,6), (2,7), (2,9), et (2,20) on obtient pour la fonction $f_0(z)$:

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{rf_0''(r)}{f_0'(r)} \right) = \min_{F \in S(\beta, \varphi)} \operatorname{Re} \left(\frac{zF'(z)}{F(z)} \right) - \max_{p \in P} \left| \frac{zp'(z)}{p(z) + \frac{\lambda}{1-\lambda}} \right|$$

c'est-à-dire

$$(2,21) \quad \operatorname{Re} \left(1 + \frac{rf_0''(r)}{f_0'(r)} \right) = \frac{1-r^2+2r(1-\beta)\cos\varphi(r\cos\varphi-1)}{1-r^2} - \frac{2r(1-\lambda)}{(1-r)[1+r(1-2\lambda)]}$$

En réduisant le second membre au même dénominateur on voit que le numérateur est le premier membre de l'équation (2,15), par conséquent sur le cercle $|z| = r_0$ on a

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{rf_0''(r)}{f_0'(r)} \right) = 0 \quad \text{pour } r = r_0.$$

Donc r_0 est bien le rayon de convexité dans la classe $C(\lambda, \gamma, \beta, \varphi)$ ce qui achève la démonstration du théorème 1.

Nous établirons maintenant une limitation de la dérivée dans notre classe.

Théorème 2. Si $f(z) \in C(\lambda, \gamma, \beta, \varphi)$, on a pour $z \in K_r$, $0 \leq r < 1$ la limitation exacte:

$$(2,22) \quad \frac{(1-r)^{(1-\beta)(1-\cos\varphi)\cos\varphi+1}}{(1+r)^{(1-\beta)(1+\cos\varphi)\cos\varphi}[1+r(1-2\lambda)]} \leq |f'(z)| \leq \frac{(1-r)^{-(1-\beta)(1+\cos\varphi)\cos\varphi-1}[1+r(1-2\lambda)]}{(1+r)^{(1-\beta)(1-\cos\varphi)\cos\varphi}}$$

où la fonction extrémale est (2,16).

Démonstration. Soit $f(z) \in C(\lambda, \gamma, \beta, \varphi)$. On sait que

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) = 1 + r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)|, \quad z = re^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1$$

et

$$\min_{f \in C(\lambda, \gamma, \beta, \varphi)} \operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \leq \operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \leq \max_{f \in C(\lambda, \gamma, \beta, \varphi)} \operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right)$$

En outre, la relation (2,16)' entraîne directement les inégalités

$$\min_{f \in C(\lambda, \gamma, \beta, \varphi)} \operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \geq \min_{F \in S(\beta, \varphi)} \operatorname{Re} \left(\frac{zF'(z)}{F(z)} \right) - \max_{p \in P} \left| \frac{zp'(z)}{p(z) + \eta} \right|$$

$$\max_{f \in C(\lambda, \gamma, \beta, \varphi)} \operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \leq \max_{F \in S(\beta, \varphi)} \operatorname{Re} \left(\frac{zF'(z)}{F(z)} \right) + \max_{p \in P} \left| \frac{zp'(z)}{p(z) + \eta} \right|$$

d'où l'on tire :

$$(2,23) \quad \min_{F \in S(\beta, \varphi)} \operatorname{Re} \left(\frac{zF'(z)}{F(z)} \right) - \max_{p \in P} \left| \frac{zp'(z)}{p(z) + \eta} \right| \leq 1 + r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)|$$

$$\leq \max_{F \in S(\beta, \varphi)} \operatorname{Re} \frac{zF'(z)}{F(z)} + \max_{p \in P} \left| \frac{zp'(z)}{p(z) + \eta} \right|$$

En tenant compte de (2,6), (2,11) i (2,14) on obtient de là :

$$2(1-\beta)\cos\varphi \frac{r\cos\varphi - 1}{1-r^2} - \frac{2(1-\lambda)}{(1-r)[1+r(1-2\lambda)]} \leq \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)|$$

$$\leq 2(1-\beta)\cos\varphi \frac{r\cos\varphi + 1}{1-r^2} + \frac{2(1-\lambda)}{(1-r)[1+r(1-2\lambda)]}$$

Intégrant dans l'intervalle $\langle 0, r \rangle$ on obtient la limitation (2,22). La démonstration précédente montre directement que (2,16) est la fonction extrémale si l'on tient compte respectivement des égalités (2,9) et (2,13).

3. Dans cette partie de notre travail nous déduirons, comme cas particuliers, quelques corollaires du théorème 1.

Corollaire 1. Si $f(z) \in C(\lambda, \gamma, \beta, 0)$, $f(z)$ est une fonction convexe dans $\bar{K}_{r_0}$, où r_0 est la plus petite racine positive de l'équation :

$$(1-2\beta)(1-2\lambda)r^3 - (3-6\lambda+4\lambda\beta)r^2 + (2\beta-3)r + 1 = 0$$

La fonction extrémale est la fonction

$$f_0(z) = \int_0^z \frac{1-z}{(1+z)^{2(1-\beta)}[1+z(1-2\lambda)]} dz.$$

Ce résultat a été obtenu en 1964 par R. Libera [3].

Corollaire 2. Si $f(z) \in C(0, \gamma, \beta, \varphi)$, $f(z)$ est une fonction convexe dans $\bar{K}_{r_0}$, où

$$r_0 = \frac{(1-\beta)\cos\varphi + 1 - \sqrt{(1-\beta)(2-\beta\cos\varphi)\cos\varphi + 2}}{2(1-\beta)\cos^2\varphi - 1}$$

est racine de l'équation :

$$[2(1-\beta)\cos^2\varphi - 1]r^2 - 2[(1-\beta)\cos\varphi + 1]r + 1 = 0$$

Ce résultat est exacte pour la fonction

$$f_0(z) = \int_0^z \frac{1-z}{(1-ze^{i\theta})^{2(1-\beta)\cos\varphi} e^{i\varphi} (1+z)} dz$$

si l'on pose $ze^{i\theta} = re^{i\psi}$, ψ étant défini par (2,9).

Corollaire 3. Si $f(z) \in C(c, \gamma, 0, \varphi)$, $f(z)$ est une fonction convexe dans $\bar{K}_{r_0}$, où r_0 est la plus petite racine positive de l'équation:

$$r^3(1-2\lambda)\cos 2\varphi + [\cos 2\varphi - 2(1-2\lambda)\cos\varphi - 2(1-\lambda)]r^2 - (2\cos\varphi + 1)r + 1 = 0$$

Ce résultat est exacte pour la fonction

$$f_0(z) = \int_0^z \frac{1-z}{(1-ze^{i\theta})^{2\cos\varphi} e^{i\varphi} [1+z(1-2\lambda)]} dz$$

si l'on pose $ze^{i\theta} = re^{i\psi}$, ψ étant défini par (2,9).

Corollaire 4. Si $f(z) \in C(\beta, \gamma, \beta, \varphi)$, $f(z)$ est une fonction convexe dans K_{r_0} , où r_0 est la plus petite racine positive de l'équation:

$$(1-2\beta)[2(1-\beta)\cos^2\varphi - 1]r^3 - [1-2(1-\beta)(\cos^2\varphi - \cos\varphi + 2\beta\cos\varphi - 1)]r^2 - [1-2(1-\beta)\cos\varphi]r + 1 = 0$$

La fonction extrémale est la fonction (2,16) avec $\lambda = \beta$. En posant encore $\lambda = \beta = 0$, on obtient:

$$r_0 = \frac{1 + \cos\varphi - \sqrt{1 + 2\cos\varphi + \sin^2\varphi}}{\cos 2\varphi},$$

et, si $\lambda = \beta = 0$ et $\varphi = 0$, $r_0 = 2 - \sqrt{3}$, la fonction extrémale étant la fonction de Koebe $f_0(z) = \frac{z}{(1+z)^2}$.

Corollaire 5. Si $f(z) \in C(\frac{1}{2}, \gamma, \frac{1}{2}, 0)$, $f(z)$ est une fonction convexe dans K_0 , où $r_0 = \sqrt{2} - 1$. La fonction extrémale est

$$f_0(z) = -z + 2\ln(1+z).$$

Corollaire 6. Si $f(z) \in C(0, \gamma, \beta, 0)$, la fonction $f(z)$ est convexe dans K_{r_0} , où

$$r_0 = \frac{2 - \beta - \sqrt{\beta^2 - 2\beta + 3}}{1 - 2\beta}$$

pour $\beta = \frac{1}{2}$, $r_0 = \frac{1}{3}$. La fonction extrémale est la fonction (2,16) avec $\lambda = 0$ et $\varphi = 0$.

RÉFÉRENCES

- [1] Bazilevič, I. E., *Обобщение одной интегральной формулы для подкласса однолистных функций*. Матем. сб. 64 (100): 4, 628–630.
 [2] Libera, R., *Some radius of convexity problems*. Duke Math. J. 31 (1964), 143–158.
 [3] Špaček, L. *Příspěvek k teorii funkcí prostých*. Časopis Pěst. Mat. a Fys. 62 (1932), 12–19.

STRESZCZENIE

W pracy tej zdefiniowano klasę funkcji $f(z) = z + b_2 z^2 + \dots$, holomorficznych w K_1 i spełniających warunek:

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{-i\gamma} \frac{zf'(z)}{F(z)} \right\} \geq \lambda \cos \gamma, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

$-\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}$, $F(z) \in \check{S}(\beta, \varphi)$. Klasę tę oznaczono przez $C(\lambda, \gamma, \beta, \varphi)$

W zdefiniowanej klasie znaleziono dokładny promień wypukłości, dokładne oszacowanie modułu pochodnej od góry i od dołu oraz podano funkcję ekstremalną.

РЕЗЮМЕ

В работе определен класс функций $f(z) = z + b_2 z^2 + \dots$, голоморфных в K_1 и удовлетворяющих условию

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{i\gamma} \frac{zf'(z)}{F(z)} \right\} \geq \lambda \cos \gamma, \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \quad -\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}, \quad F(z) \in \check{S}(\beta, \varphi).$$

Этот класс обозначен через $C(\lambda, \gamma, \beta, \varphi)$. В определенном классе установлены точный радиус выпуклости, подробная оценка модуля производной сверху и снизу, а также экстремальная функция.

UNIWERSYTET MARII
CURIE-SKŁODOWSKIEJ

*

Nakład 750 egz. Ark. wyd. 8.
Ark. druk. 6,25. Papier druk. sat.
kl. III 80 g. Oddano do składania
20 V 1971 r. Druk ukończono
w lipcu 1972 r.
Zam. nr 654/71

*

WROCŁAWSKA
DRAKARNIA NAUKOWA

1. Z. Bogucki: On a Theorem of M. Biernacki Concerning Subordinate Functions.
O twierdzeniu M. Biernackiego dotyczącym funkeji podporządkowanych.
2. Z. Bogucki and J. Waniurski: On a Theorem of M. Biernacki Concerning Convex Majorants.
O twierdzeniu M. Biernackiego dotyczącym majorant wypukłych.
3. R. M. Goel: On the Partial Sums of a Class of Univalent Functions.
O sumach częściowych pewnej klasy funkeji jednolistnych.
4. F. F. Jabłoński et Z. Lewandowski: Caractérisation de certaines classes de fonctions holomorphes par la subordination modulaire.
Charakteryzowanie pewnych klas funkeji holomorficznych w terminach podporządkowania modułowego.
5. Z. Lewandowski: On some Problems of M. Biernacki Concerning Subordinate Functions and on some Related Topics.
O pewnych zagadnieniach M. Biernackiego dotyczących podporządkowania funkeji i pewnych problemach pokrewnych.
6. Z. Lewandowski and J. Stankiewicz: On Mutually Adjoint Close-to-Convex Functions.
O wzajemnie sprzężonych funkejach prawie — wypukłych.
7. J. Stankiewicz: Some Remarks on Functions Starlike with Respect to Symmetric Points.
Pewne uwagi o funkejach gwiaździstych względem punktów symetrycznych.
8. M. Maksym: Relations entre les plans osculateurs orientés de 15 types.
Zależności między zorientowanymi płaszczyznami ściśle stycznymi 15 typów.
9. M. Maksym: Les familles d'éléments plans $P(M)$, généralisation des plans osculateurs d'une courbe.
Rodziny elementów płaskich $P(M)$, stanowiących uogólnienie płaszczyzn ściśle stycznych krzywej.
10. M. Maksym: Sur la continuité des paratingens plans osculateurs d'une courbe.
O ciągłości paratyngensów płaszczyzn ściśle stycznych do krzywej.
11. J. Sowiński: Sur la congruence des surfaces dans l'espace équi affine.
O przystawianiu powierzchni w przestrzeni ekwifinicznej.
12. D. Szynal: Certaines inégalités pour les sommes de variables aléatoires et leur application dans l'étude de la convergence de séries et de suites aléatoires.
Pewne nierówności dla sum zmiennych losowych i ich zastosowanie w badaniu zbieżności szeregów i ciągów losowych.

4050

21

CZASOPISMA

1967

ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE
VOL. XX
SECTIO A

1. G. Labelle: On the Theorems of Gauss-Lucas
O twierdzeniach Gaussa-Lucasa i Gr
2. F. Bogowski, F. F. Jabłoński, et J. Stankiewicz: Inégalité des modules pour certaines classes de fonctions holomorphes dans le cercle unité.
Podporządkowanie obszarowe a nierówności modułów dla pewnych klas funkcji holomorficzných w kole jednostkowym.
3. J. Chądzyński and J. Ławrynowicz: On Homeomorphisms and Quasi-conformal Mappings Connected with Cyclic Groups of Homographies and Antigraflies.
O homeomorfizmach i odwzorowaniach quasi-konforemnych związanych z grupami cyklicznymi homografii i antygrafii.
4. Z. Lewandowski and J. Stankiewicz: On the Region of Variability of $\log f'(z)$ for some Classes of Close-to-convex Functions.
Obszar zmienności $\log f'(z)$ w pewnych podklasach funkcji prawie wypukłych.
5. J. Miazga, J. Stankiewicz and Z. Stankiewicz: Radii of Convexity for some Classes of Close-to-convex Functions.
Promienie wypukłości pewnych podklas funkcji prawie wypukłych.
6. J. Stankiewicz: Quelques problèmes extrémaux dans les classes des fonctions α -angulairement étoilées.
Pewne problemy ekstremalne w klasach funkcji α -kątowno gwiazdzistych.
7. J. Stankiewicz: On some Classes of Close-to-convex Functions.
O pewnych podklasach funkcji prawie wypukłych.
8. A. Wesołowski: Relations entre la subordination et l'inégalité des modules dans le cas des majorantes appartenant a la classe $N(p, 0; q)$.
Zależność między podporządkowaniem i nierównością modułów w przypadku majorant należących do klasy $N(p, 0, q)$.
9. A. Żmurek: Sur les relations entre les plans osculateurs à k -dimensions d'une courbe dans l'espace euclidien à n -dimensions.
Zależności między k -wymiarowymi płaszczyznami ściśle stycznymi krzywej w przestrzeni euklidesowej n -wymiarowej.

Adresse:

UNIERSYTET MARII CURIE-SKŁODOWSKIEJ
BIURO WYDAWNICTW
LUBLIN Plac Litewski 5 POLOGNE