ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XVIII, 9 SECTIO A 1964

Z Zakładu Geometrii Zespołowej Katedry Matematyki
Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik Zakładu: doc. dr Konstanty Radziszewski

KONSTANTY RADZISZEWSKI

Sur la coincidence des surfaces dans l'espace projectif

O przystawaniu powierzchni w przestrzeni rzutowej

О совпадении поверхностей в проективном пространстве

Soient donnés deux surfaces n-dimensionnelles V_n et V_n^* contenues dans l'espace projectif P_{n+1}, $(n+1)$-dimensionnel. Nous nous occupons du problème: quelle est la transformation T de V_n sur V_n^* qui fait correspondre à chaque variété plane $V_{n-1} \subset V_n$, $V_{n-1} \subset P_n$, une variété plane $V_{n-1}^* \subset V_n^*$, $V_{n-1}^* \subset P_n^*$, où P_n et P_n^* sont des plans n-dimensionnels de P_{n+1}. C'est-à-dire nous trouverons les transformations T conservant les invariants du groupe projectif, déterminés sur les surfaces V_n et V_n^*.

Dans le cas $n = 2$ ce problème est analogue à celui, considéré dans [3], concernant la détermination des surfaces par les courbes invariantes par rapport aux transformations projectives.

Comme nos considérations concerneront un certain entourage d'un point 0, nous pouvons y introduire les coordonnées affines $x^1, \ldots, x^{n+1}$, c'est-à-dire nous posons $x^{n+2} = 1$. Dans ces coordonnées les surfaces V_n et V_n^* sont données par les équations

$$(1) \qquad x^i = x^i(u^1, \ldots, n^n) \text{ et } x^i = x^{*i}(u^1, \ldots, u^n),\ i = 1, \ldots, n+1,$$

déterminées dans un ensemble ouvert et connexe Δ, $u = (u^1, \ldots, u^n) \in \Delta$. Admettons que les mêmes valeurs de u^i déterminent les points M et M^* de V_n et V_n^* correspondants par rapport à T.

Plaçons V_n et V_n^* de telle manière qu'on ait

$$(2) \qquad x^i(0) = x^{*i}(0) = 0,\ x^i_j(0) = x^{*i}_j(0) = \delta^i_j x^{(j)}_{(j)}(0).$$

où $x^i_j = \partial x^i / \partial u^j$, $i = 1, \ldots, n+1$, $j = 1, \ldots, n$, $0 = (0, \ldots, 0)$, i δ^i_j est le symbole de Kronecker. Nous supprimons les signes de sommation par rapport à l'indice répété deux fois, en haut et en bas. L'indice contenu entre parenthèses, p. ex. $x^{(j)}_j$ ne participe pas à l'opération de sommation.

Soient données les équations des plans P_n et P_n^* correspondants par rapport à la transformation T sous la forme suivante:

$$A_i x^i = 0 \text{ et } A_i^* x^i = 0 \tag{3}$$

respectivement, c'est-à-dire nous prenons en considération les plans passant par le point 0. Admettons que les points $x^i(u)$ et $x^{*i}(u)$ sont correspondants par rapport à T.

Substituons (1) dans (3); nous obtenons les équations suivantes

$$A_i x^i(u) = 0 \text{ et } A_i^* x^{*i}(u) = 0. \tag{4}$$

Ces équations déterminent le même sous-ensemble $\Delta(P_n) \subset \Delta$, car les points et les plans sont correspondants par rapport à T. En vertu de [1] on peut résoudre ces équations par rapport à u^1, si $A_i x_1^i(0) = A_1 x_1^1(0) \neq 0$, $A_1^* x_1^1(0) \neq 0$,

$$u^1 = u^1(u^2, \ldots, u^n, A_1, \ldots, A_{n+1}), \tag{5}$$
$$u^1 = u^{*1}(u^2, \ldots, u^n, A_1^*, \ldots, A_{n+1}^*).$$

Si nous substituons (5) dans (4), on obtient les identités suivantes:

$$A_i x^i[u^1(u^2, \ldots, u^n, A_1, \ldots, A_{n+1}), u^2, \ldots, u^n] = 0 \tag{6_1}$$

$$A_i^* x^{*i}[u^1(u^2, \ldots, u^n, A_1^*, \ldots, A_{n+1}^*), u^2, \ldots, u^n] = 0. \tag{6_2}$$

Dans la suite de ce travail nous écrirons presque exclusivement les expressions concernant la surface V_n, les analogues pour V_n^* peuvent être obtenues en mettant le signe * en haut des lettres correspondantes.

Dérivons (6_1) par rapport à u^p, $p = 2, \ldots, n$, et A_q, $q = 1, \ldots, n+1$. Les dérivées $\partial u^1/\partial u^p$, $\partial x^i/\partial u^j$, $\partial u^1/\partial A_q$ seront désignées respectivement par u_p^1, x_j^i, u_Q^1. Nous obtenons au point u

$$A_i(x_1^i u_p^1 + x_p^i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n+1,\ p = 2, \ldots, n, \tag{7_1}$$

$$x^Q + A_i x_1^i u_Q^1 = 0, \quad i, Q = 1, \ldots, n+1. \tag{7_2}$$

En vertu (2), ces identitée prennent au point 0 la forme suivante

$$A_1 x_1^1 u_p^1 + a_p x_{(p)}^{(p)} = 0 \text{ ou } u_p^1 = A_p x_{(p)}^{(p)}/A_1 x_1^1, \tag{8_1}$$

$$u_Q^1 = 0. \tag{8_2}$$

Comme les coefficiènts A_i et aA_i déterminent le même plan, nous pouvons poser

$$A_1 = A_1^*.$$

Or, u_p^1 prend les mêmes valeurs pour V_n et V_n^*, d'où, en éliminant u_p^1 de (8_1) et son analoque pour la surface V_n^*, nous obtenons

$$A_i = A_i^*, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Dérivons (7_1) et (7_2) deux fois par rapport à u^p, $p = 2, \ldots, n$.

(10) $$A_i[(x^i_{11}u^1_p + x^i_{1p})u^1_p + x^i_1 u^1_{pp} + x^1_{p1}u^1_p + x^i_{pp}] = 0,$$

(11) $$x^Q_1 u^1_p + x^Q_p + A_i[(x^i_{11}u^1_p x^i_{1p})u^1_Q + x^i_1 u^1_{Qp}] = 0,$$

(12) $$(x^Q_{11}u^1_p + x^Q_{1p})u^1_p + x^Q_1 u^1_{pp} + x^Q_{p1}u^1_p + x^Q_{pp} + A_i\{[(x^i_{111}u^1_p + x^i_{1p1})u^1_p + $$
$$+ x^i_{11}u^1_{pp} + x^i_{1p1}u^1_p x^i_{1pp}]u^1_Q + (x^i_{11}u^1_p + x^i_{1p})u^1_{Qp} + x^i_1 u^1_{Qpp}\} = 0.$$

En vertu de (8_2) et (2) ces identités prennent au point 0 la forme suivante:

(10_1) $$A_1 x^1_1 u^1_{pp} + A_i(x^i_{11}u^1_p u^1_p + 2x^i_{1p}u^1_p + x^i_{pp}) = 0,$$

(11_1) $$x^Q_1 u^1_p + x^Q_p + A_1 x^1_1 u^1_{Qp} = 0,$$

(12_1) $$x^Q_{11}u^1_p u^1_p + 2x^Q_{1p}u^1_p + x^Q_{pp} + x^Q_1 u^1_{pp} +$$
$$+ A_i(2x^i_{11}u^1_p u^1_{Qp} + 2x^i_{1p}u^1_{Qp}) + A_1 x^1_1 u^1_{Qpp} = 0.$$

De (11_1) et (8_1) nous avons pour $Q = 1$ et $Q = p$

(13_1) $$u^1_{Ip} = x^1_1 u^1_p / x^1_1 A_1 = A_p x^{(p)}_{(p)} / (A_1)^2 x^1_1, \; p = 2, \ldots, n, \; I = 1$$

(13_2) $$u^1_{Pp} = -x^{(p)}_{(p)} / A_1 x^1_1, \quad P = p,$$

et de (10_1) et (8_1)

(14) $$F(x, A) = -A_1 x^1_1 u^1_{pp}$$
$$= A_i[x^i_{11}(A_p x^{(p)}_{(p)}/A_1 x^1_1)^2 - 2x^i_{1p}A_p x^{(p)}_{(p)}/A_1 x^1_1 + x^i_{pp}].$$

De (12_1), (13_1), (13_2), (8_1) pour $Q = 1$ et $Q = p$ nous avons

(15) $$G_1(x, A) = -A_1 x^1_1 u^1_{Ipp} = x^1_{11}(A_p x^{(p)}_{(p)}/A_1 x^1_1)^2 - 2x^1_{1p}A_p x^{(p)}_{(p)}/A_1 x^1_1 + x^1_{pp} -$$
$$- A_i[x^i_{11}(A_p x^{(p)}_{(p)}/A_1 x^1_1)^2 - 2x^i_{1p}A_p x^{(p)}_{(p)}/A_1 x^1_1 + x^i_{pp}]/A_1 +$$
$$+ 2A_i[-x^i_{11}A_p x^{(p)}_{(p)}/A_1 x^1_1 + x^i_{1p}]A_p x^{(p)}_{(p)}/(A_1)^2 x^1_1;$$

(15_2) $$G_2(x, A) = -A_1 x^1_1 u^1_{Ppp} = x^p_{11}(A_p x^{(p)}_{(p)}/A_1 x^1_1)^2 - 2x^{(p)}_{1p}A_p x^{(p)}_{(p)}/A_1 x^1_1 +$$
$$+ x^{(p)}_{pp} - 2A_i(-x^i_{11}A_p x^{(p)}_{(p)}/A_1 x^1_1 + x^i_{1p})x^{(p)}_{(p)}/A_1 x^1_1,$$

ou, plus brièvement en ajoutant les termes semblables

(15_1) $$G_1(x, A) = x^1_{11}(A_p x^{(p)}_{(p)}/A_1 x^1_1)^2 - 2x^1_{1p}A_p x^{(p)}_{(p)}/A_1 x^1_1 + x^1_{pp} -$$
$$- A_i[3x^i_{11}(A_p x^{(p)}_{(p)})^2/(A_1)^3(x^1_1)^2 - 4x^i_{1p}A_p x^{(p)}_{(p)}/(A_1)^2 x^1_1 + x^i_{pp}/A_1],$$
$$p = 2, \ldots, n, \; i = 1, \ldots, n+1.$$

Naturellement, comme $A_i = A_i^*$ pous $i = 1, \ldots, n$, nous avons

$$(16_1) \qquad F(x, A) = F(x^*, A^*),$$

$$(16_2) \qquad G_1(x, A) = G_1(x^*, A^*),$$

$$(16_3) \qquad G_2(x, A) = G_2(x^*, A^*),$$

(A) Admettons que les plans $P_n^i\colon x^i = 0$ et $P_n^{*i}\colon x^i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, sont correspondants par rapport à la transformation T (c'est-à-dire les variétés V_{n-1} et V_{n-1}^* de V_n et V_n^* sont contenues dans les mêmes plans de coordonnées). Substitons 1 dans les équations de ces plans; alors on obtient

$$(17) \qquad x_i(u) = 0 \text{ et } x^{*i}(u) = 0$$

qui déterminent le même ensemble $\Delta(P_n^i) \subset \Delta$, car P_n^i et P_n^{*i} sont correspondants et les point correspondants par rapport à T ont les mêmes coordonnées u^i. Puisque $x_{(i)}^{(i)}(0) = x_{(i)}^{*(i)}(0) \neq 0$, on peut résoudre (17) par rapport à u^i

$$u^i = u^i(u^1, \ldots, u^j, \ldots, u^n),\; u^i = u^{*i}(u^1, \ldots, u^j, \ldots, u^n),$$
$$j \neq i,\; u^i = u^{*i}$$

Substituons ces u^i dans (17) et dérivons les identités obtenues deux fois par rapport à u^p et u^q,; $p, q \neq i$. Nous aurons au point u

$$(18) \qquad x_{(i)}^i u_p^i + x_p^i = 0,\; x_{(i)}^{*i} u_p^i + x_p^{*i} = 0$$

$$(19) \qquad (x_{(i)(i)}^i u_q^i + x_{(i)q}^i) u_p^i + x_{(i)}^i u_{pq}^i + x_{p(i)}^i u_q^i + x_{pq}^i = 0$$

et au point 0 (vu (2)) $u_p^i = u_p^{*i} = 0$, $i \neq p$,

$$x_{(i)}^i u_{pq}^i + x_{pq}^i = 0,\; x_{(i)}^{*i} u_{pq}^i + x_{pq}^{*i} = 0, \text{ d'où}$$

$$(20) \qquad x_{pq}^i = x_{pq}^{*i} \text{ pour } p, q \neq 1;\; p, q, i = 1, \ldots, n.$$

D'après (20), les identités (16_2) ne contiennent que les termes avec A_1, A_p, A_{n+1} et A_{n+1}, donc les équations (16_2) et (16_3) prennent la forme:

$$(21) \qquad -x_{pp}^{(p)} A_p/A_1 - 2x_{11}^1 (A_p x_p^{(p)}/A_1 x_1^1)^2 + 2x_{1p}^1 x_p^{(p)} A_p/A_1 x_1^1 +$$
$$+ 4x_{1p}^{(p)} x_p^{(p)} (A_p)^2/(A_1)^2 x_1^1 +$$
$$+ A_{n+1}[-3x_{11}^{n+1} (A_p x_{(p)}^{(p)})^2/(A_1)^3 (x_1^1)^2 + 4x_{1p}^{n+1} A_p x_{(p)}^{(p)}/(A_1)^2 x_1^1 - x_{pp}^{n+1}/A_1]$$

= la même expression avec signes * en haut des lettres correspondantes;

$$(22) \qquad -4x_{1p}^{(p)} A_p x_{(p)}^{(p)}/A_1 x_1^1 + x_{pp}^{(p)} - 2(-x_{11}^1 A_p x_{(p)}^{(p)}/A_1 x_1^1 + x_{1p}^1) x_{(p)}^{(p)}/x_1^1 -$$
$$-2A_{n+1}[-x_{11}^{n+1} A_p (x_{(p)}^{(p)})^2/(A_1 x_1^1)^2 + x_{1p}^{n+1} x_{(p)}^{(p)}/A_1 x_1^1]$$

= la même expression avec le signe * en haut des lettres correspondantes.

Ecrivons les identités (21) et (22) sous la forme plus simple:

$$(21_1)\quad a_1(A_p/A_1)^2+b_1A_p/A_1+A_{n+1}[c_1(A_p)^2/(A_1)^3+d_1A_p/(A_1)^2+e_1/A_1]=$$
$$=a_1^*(A_p/A_1)^2+b_1^*A_p/A_1+A_{n+1}^*[c_1^*(A_p)^2/(A_1)^3+d_1^*A_p/(A_1)^2+e_1^*/A_1]$$

$$(22_1)\quad a_2A_p/A_1+b_2-2A_{n+1}[c_2A_p/(A_1)^2+d_2/A_1]=$$
$$=a_2^*A_p/A_1+b_2^*-2A_{n+1}^*[c_2^*A_p/(A_1)^2+d_2^*/A_1]$$

Posons

$$\Delta a_i=a_i-a_i^*,\quad \Delta b_i=b_i-b_i^*,\quad i=1,2.$$

Alors (21_1) et (22_1) s'ècrivent

$$(23)\quad \Delta a_1(A_p/A_1)^2+\Delta b_1A_p/A_1+A_{n+1}[c_1(A_p)^2/(A_1)^3+d_1A_p/(A_1)^2+$$
$$+e_1/A_1]=A_{n+1}^*[c_1^*(A_p)^2/(A_1)^3+d_1^*A_p/(A_1)^2+e_1^*/A_1];$$

$$(24)\quad \Delta a_2A_p/A_1+\Delta b_2-2A_{n+1}[c_2A_p/(A_1)^2+d_2/A_1]$$
$$=-2A_{n+1}^*[c_2^*A_p/(A_1)^2+d_2^*/A_1].$$

De (23) et (24) éliminons A_{n+1}^* et multiplions le résultat par les dénominateurs. Alors, comme A_{n+1} ne dépend pas de A_1 et A_p donc, les parties de cette identité na contenant pas de termes avec A_{n+1} doivent être identiques; c'est-à-dire

$$(25)\quad -2[\Delta a_1c_2^*(A_p)^3/(A_1)^4+\Delta b_1c_2^*(A_p)^2/(A_1)^3+$$
$$+\Delta a_1d_2^*(A_p)^2/(A_1)^3+\Delta b_1d_2^*A_p/(A_1)^2]$$
$$=\Delta a_2c_1^*(A_p)^3/(A_1)^4+\Delta a_2d_1^*(A_p)^2/(A_1)^3+$$
$$+\Delta a_2e_1^*A_p/(A_1)^2+\Delta b_2c_1^*(A_p)^2/(A_1)^3+$$
$$+\Delta b_2d_1^*A_p/(A_1)^2+\Delta b_2e_1^*/A_1.$$

Comparant les coefficients dans (25) nous obtenons

$$(26)\quad -2\Delta a_1c_2^*=\Delta a_2c_1^*,$$

c'est-à-dire, si $\Delta x_{jk}^i=x_{jk}^i-x_{jk}^{*i}$,

$$-2[-2\Delta x_{11}^1(x_{(p)}^{(p)}/x_1^1)^2+4\Delta x_{p1}^{(p)}x_{(p)}^{(p)}/x_1^1][-x_{11}^{*n+1}(x_{(p)}^{(p)}/x_1^1)^2$$
$$=[-4\Delta x_{1p}^{(p)}(x_{(p)}^{(p)}/x_1^1)^2+2\Delta x_{11}^1(x_{(p)}^{(p)}/x_1^1)^2][-3x_{11}^{*n+1}(x_{(p)}^{(p)}/x_1^1)^2],$$

ou, $\Delta x_{11}^1x_{(p)}^{(p)}/x_1^1-2\Delta x_{1p}^{(p)}=0$, lorsque $x_{11}^{*n+1}(0)\neq 0$, donc d'après (21) et (21_1) $\Delta a_1=0$ et de (26)

$$(27)\quad \Delta a_2=0.$$

Ensuite

(28) $$\Delta b_1 c_2^* + \Delta a_1 d_2^* = \Delta a_2 d_1^* + \Delta b_2 c_1^* \quad \text{ou} \quad \Delta b_1 c_2^* = \Delta b_2 c_1^*,$$

c'est-à-dire $[-\Delta x_{pp}^{(p)} + 2\Delta x_{1p}^1 x_{(p)}^{(p)}/x_1^1][-x_{11}^{*n+1}(x_{(p)}^{(p)}x_1^1)^2]$

$$= [x_{pp}^{(p)} - 2\Delta x_{1p}^1 x_{(p)}^{(p)}/x_1^1][-3x_{11}^{*n+1}(x_{(p)}^{(p)}/x_1^1)^2],$$

d'où

$\Delta x_{pp}^{(p)} - 2\Delta x_{1p}^1 x_{(p)}^{(p)}/x_1^1 = 0$, ou en vertu de (21), (21_1) et (28) $\Delta b_1 = \Delta b_2 = 0$.

Donc, dans les identités (21), (22) ou (16_2), (16_3) restent seulement les membres contenants A_{n+1} et A_{n+1}^*. En divisant (16_2) par (16_3) nous obtenons $G_1(x, A)/G_2(x, A) = G_1(x^*, A^*)/G_2(x^*, A^*)$, où en vertu des résultats prècèdents les coefficients A_{n+1} et A_{n+1}^* ne figurent plus. Donc l'identité $G_1(x, A)G_2(x^*, A^*) = G_1(x^*, A^*)G_2(x, A)$ se présentera sous la forme suivante:

$$-3x_{11}^{n+1}x_{11}^{*n+1}(A_p)^3(x_{(p)}^{(p)})^4/(A_1)^5(x_1^1)^4 + 4x_{1p}^{n+1}x_{11}^{*n+1}(A_p)^2(x_{(p)}^{(p)})^3/(A_1)^4(x_1^1)^3 -$$
$$-x_{pp}^{n+1}x_{11}^{*n+1}A_p(x_{(p)}^{(p)})^2/(A_1)^3(x_1^1)^2 + 3x_{11}^{n+1}x_{1p}^{*n+1}(A_p)^2(x_{(p)}^{(p)})^3/(A_1)^4(x_1^1)^3 -$$
$$-4x_{1p}^{n+1}x_{1p}^{*n+1}A_p(x_{(p)}^{(p)})^2/(A_1)^3(x_1^1)^2 + x_{pp}^{n+1}x_{1p}^{*n+1}x_{(p)}^{(p)}/(A_1)^2x_1^1$$
$$= -3x_{11}^{*n+1}x_{11}^{n+1}(A_p)^3(x_{(p)}^{(p)})^4/(A_1)^5(x_1^1)^4 + 4x_{1p}^{*n+1}x_{11}^{n+1}(A_p)^2(x_{(p)}^{(p)})^3/(A_1)^4(x_1^1)^3 -$$
$$-4x_{1p}^{*n+1}x_{1p}^{n+1}A_p(x_{(p)}^{(p)})^2/(A_1)^3(x_1^1)^2 - x_{pp}^{*n+1}x_{11}^{n+1}A_p(x_{(p)}^{(p)})^2/(A_1)^3(x_1^1)^2 +$$
$$+3x_{11}^{*n+1}x_{1p}^{n+1}(A_p)^2(x_{(p)}^{(p)})^3/(A_1)^4(x_1^1)^3 + x_{pp}^{*n+1}x_{1p}^{n+1}x_{(p)}^{(p)}/(A_1)^2x_1^1.$$

En comparant les coefficients, si A_i sont variables, nous obtenons

$$4x_{1p}^{n+1}x_{11}^{*n+1} + 3x_{11}^{n+1}x_{1p}^{*n+1} = 4x_{1p}^{*n+1}x_{11}^{n+1} + 3x_{11}^{*n+1}x_{1p}^{n+1},$$
$$-x_{pp}^{n+1}x_{11}^{*n+1} - 4x_{1p}^{n+1}x_{1p}^{*n+1} = -x_{pp}^{*n+1}x_{11}^{n+1} - 4x_{1p}^{*n+1}x_{1p}^{n+1},$$

d'où

(29) $$x_{pp}^{n+1}x_{11}^{*n+1} = x_{pp}^{*n+1}x_{11}^{n+1}, \quad x_{1p}^{n+1}x_{11}^{*n+1} = x_{1p}^{*n+1}x_{11}^{n+1},$$
$$x_{pp}^{n+1}x_{1p}^{*n+1} = x_{pp}^{*n+1}x_{1p}^{n+1}.$$

Posons au point 0

(29_1) $$x_{11}^{n+1} = ax_{11}^{*n+1},$$

alors de (29) nous avons

(29_2) $$x_{1p}^{n+1} = ax_{1p}^{*n+1},$$

(29_3) $$x_{pp}^{n+1} = ax_{pp}^{*n+1},$$

d'où, en vertu de (16_2) ou (16_3) nous obtenons

(30) $$A_{n+1}^* = aA_{n+1}, \quad a = \text{const.}$$

Fixons maintenant les points $M(z^1, \ldots, z^{n+1})$ et $M^*(z^{*1}, \ldots, z^{*n+1})$ appartenant aux surfaces V_n et V_n^* respectivement et correspondants par rapport à T. Alors, pour les plans correspondants contenant $0, M$ et $0, M^*$ respectivement nous avons

$$A_i z^i = 0 \text{ et } A_i^* z^{*i} = 0.$$

A_{n+1} et A_{n+1}^* sont ainsi déterminés par les autres A_i et M, M^*,

$$(31) \qquad -A_{n+1} = A_j z^j / z_{n+1}, \; A_{n+1}^* = -A_j z^{*j}/z^{*n+1} = aA_{n+1}, \; j = 1, \ldots, n.$$

De (31) nous avons identiquement

$$(31_1) \qquad aA_j z^j / z_{n+1} = A_j z^{*j}/z^{*n+1}$$

d'où en comparant les coefficients, si A_j sont variables,

$$az^j/z^{n+1} = z^{*j}/z^{*n+1}$$

Posons $z^{*n+1} = bz^{n+1}$, alors $z^{*j} = abz^j$, $j = 1, \ldots, n$,

$$z^{*n+1} = bz^{n+1},$$

ou brièvement

$$(32) \qquad z^{*i} = a^i bz^i, \; a^i = a = \text{const.}, \; i = 1, \ldots, n, \; a^{n+1} = 1,$$

pour tous les points M et M^* correspondants par rapport à T et tels que $z^{n+1} \neq 0$, $z^{*n+1} \neq 0$.

De (32) nous obtenons en dérivant

$$(32_1) \qquad z_p^{*i} = a^i b_p z^i + a^i bz_p.$$

Fixons deux points $M_0(x^1(u_0), \ldots, x^{n+1}(u_0))$ et $M_0^*(x^{*1}(u_0), \ldots, x^{*n+1}(u_0))$, $M_0 \subset V_n$, $M_0^* \subset V_n^*$, correspondants par rapport à la transformation T.

Il existe une application projective de P_{n+1} sur soi-même qui transforme V_n^* en la position satisfaisant aux conditions (2) et (A). Ces conditions exigent $n+1+n(n+1)+n = n^2+3n+1$ paramètres du groupe projectif ($0^* \to 0 = n+1$ paramètres, $r_i^*(0) \to r_i(0) = n(n+1)$ paramètres et la droite $x_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, est l'image de l'intersection des plans P_n^i, $i = 1, \ldots, n$, correspondants aux plans $x^i = 0$ par rapport à $T = n$ paramètres, car $0^* \to 0$ était déjà compté). Comme le groupe projectif dépend de $(n+2)^2-1 = n^2+4n+3$ paramètres, il existe une application projective qui satisfait en outre aux conditions (voir (32)):

$$(33) \qquad b_i(u_0) = 0, \; i = 1, \ldots, n,$$

$$(34) \qquad x^1(u_0) = x^{*1}(u_0)$$

$$(35) \qquad x^{n+1}(u_0) = x^{*n+1}(u_0)$$

au point fixé M_0. Cela donne $n+2$ conditions supplémentaires et ainsi nous avons utilisé tous les paramètres $n^2+3n+1+n+2 = n^2+4n+3$, c'est-à-dire l'application projective satisfaisant à ces conditions est déterminée d'une façon univoque.

En vertu de (34) et (32) nous avons

$$x_i(u_0) = x^{*i}(u_0), \quad i = 1, \ldots, n+1, \tag{36}$$

c'est-à-dire $M_0 = M_0^*$,

$$a = 1 \tag{37}$$

$$b(u_0) = 1 \tag{38}$$

et de (32_1)

$$x_p^i(u_0) = x_p^{*i}(u_0), \quad p = 1, \ldots, n; \; i = 1, \ldots, n+1. \tag{39}$$

De (37), (30), (32) en profitant de la continuité nous obtenons, si $r(u)$ signifie le rayon-vecteur $\left(x^1(u), \ldots, x^{n+1}(u)\right)$,

$$r^*(u) = b(u)r(u) \tag{40}$$

dans un entourage de 0 et

$$A_i^* = A_i, \quad i = 1, \ldots, n+1, \tag{41}$$

pour les plans correspondants par rapport à T et contenant 0. (Nous utilisons ici des vecteurs exclusivement pour abréger l'écriture).

Considérons tous les plans $P_n(M_0)$ et $P_n^*(M_0)$ contenant M_0 et correspondants par rapport à T. Leurs équations

$$B_i x^i + B^{n+2} = 0 \text{ et } B_i^* x^i + B_{n+2}^* = 0, \quad i = 1, \ldots, n+1, \tag{42}$$

satisfont aux conditions

$$B_i x^i(u_0) + B_{n+2} = 0 \text{ et } B_i^* x^{*i}(u_0) + B_{n+2}^* = 0. \tag{43}$$

Comme B_i et cB_i déterminent le meme plan, nous pouvons poser

$$B_{n+2}^* = B_{n+2}.$$

Substituons (1) dans (42), alors les équations

$$B_i x^i(u) + B_{n+2} = 0 \text{ et } B_i^* x^{*i}(u) + B_{n+2} = 0 \tag{44}$$

déterminent le même ensemble $A(P_n)$

En vertu de [1], si $B_i x_1^i(u_0) \neq 0$, nous pouvons résoudre (44) par rapport à u^1

$$u^1 = u^1(u^2, \ldots, u^n, B_1, \ldots, B_{n+2}) \tag{45}$$

$$u^1 = u^{*1}(u^2, \ldots, u^n, B_1^*, \ldots, B_{n+2}^*)$$

et on a $u^1 = u^{*1}$.

Substituant (45) dans (44), nous obtenons l'identité suivante:

$$(46)\quad B_i x^i[u^1(u^2, \ldots, u^n, B_1, \ldots, B_{n+2}), u^2, \ldots, u^n] + B_{n+2} = 0$$

$$B_i^* x^{*i}[u^1(u^2, \ldots, u^n, B_1^*, \ldots, B_{n+2}^*), u^2, \ldots, u^n] + B_{n+2} = 0.$$

Dérivons (46) par rapport à u^p et B_q. Désignons

$$\partial u^1/\partial B_q = u_Q^1.$$

$$B_i x_1^i u_p^1 + B_i x_p^i = 0, \quad B_i^* x_1^{*i} u_p^1 + B_i^* x_p^{*i} = 0; \quad p = 2, \ldots, n,$$

$$x^Q + B_i x_1^i u_Q^1 = 0, \quad x^{*Q} + B_i^* x_1^{*i} u_{Q^*}^{*1} = 0; \quad i, Q = 1, \ldots, n+1$$

$$B_i x_1^i u_{N+2}^1 + 1 = 0, \quad B_i^* x_1^{*i} u_{N+2}^{*1} + 1 = 0.$$

Puisque $B_{n+2}^* = B_{n+2}$, on a $u_{N+2}^1 = u_{N+2}^{*1}$, d'où

$$B_i x_1^i = B_i^* x_1^{*i}, \quad B_i x_p^i = B_i^* x_p^{*i}, \quad p = 2, \ldots, n.$$

En vertu de (36) et (39) nous obtenons au point M_0

$$(B_i^* - B_i) x_j^i(u_0) = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$(B_i^* - B_i) x^i(u_0) = 0, \quad i = 1, \ldots, n+1.$$

Nous avons obtenu un système d'équations linéaires homogèges, d'où les vecteurs $r_j(u_0)$ et $r(u_0)$ étant linéairement indépendants.

$$B_i^* = B_i, \quad i = 1, \ldots, n+2.$$

Mais alors les points $M \in V_n$ et $M^* \in V_n^*$ correspondants par rapport à T se trouvent sur une droite passant par M_0, car ils appartiennent simultanément à chaque plan contenant les points M_0 et M. Donc

$$r^*(u) - r(u_0) = k[r(u) - r(u_0)].$$

D'autre part

$$r^*(u) = b(u) r(u), \quad \text{d'où}$$

$$br(u) - r(u_0) = kr(u) - kr(u_0). \quad \text{Cela nous donne}$$

$$b = k, \quad k = 1, \quad \text{donc } b = 1 \text{ et } r^*(u) = r(u)$$

dans un antourage du point 0.

Nous avons démontré que les surfaces V_n et V_n^* sont identiques aprés une transformation projective de P_{n+1}, dans un entourage du point 0, si $x_{11}^{n+1}(0) \neq 0$, c'est-à-dire la forme fondamentale de V_n n'y est pas identiquement égale à zéro (donc V_n n'y est pas un ensemble plan). Nous avons aussi démontré que dans ce cas les plans correspondants par rapport à T y sont identiques. Considérons deux points quelconques

$M \epsilon V_n$ et $M^* \epsilon V_n^*$ correspondants par rapport à T. Le point M est déterminé par $n+1$ plans différents coupant cet entourage, c'est-à-dire nous prenons $n+1$ plans contenant un seul point M de V_n en commun. Mais le point M^* se trouve dans chacun de ces plans, parce que les plans correspondants par rapport à T sont identiques dans cet entourage de 0. Donc nous avons $M^* = M$ pour tous les points correspondants des surfaces V_n et V_n^*.

Ainsi, nous avons démontré le théorème suivant:

Théorème. *Soint données deux surfaces n-dimensionnelles* V_n *et* V_n^* *de classe* $C^{(3)}$ *contenues dans l'espace projectif* $(n+1)$*-dimensionnel* P_{n+1} *et n'etant pas des ensembles plans. Si application biunivoque régulière* T *de* V_n *sur* V_n^* *fait correspondre à chaque variété* $(n-1)$*-dimensionnelle plane* $V_{n-1} \subset V_n$, $V_{n-1} \subset P_n$, *une variété* $(n-1)$*- dimensionnelle plane* $V_{n-1}^* \subset V_n^*$, $V_{n-1}^* \subset P_n^*$, *où* P_n *et* P_n^* *sont des plans n-dimensionnels de* P_{n+1}, *alors il existe une transformation projective* T' *de* P_{n+1} *identique à* T *sur* V_n.

Ce théorème de prolongement des transformations peut être énoncé sous la forme plus simple:

Si V_n et V_n^* sont des surfaces n-dimensionnelles de classe $C^{(3)}$, contenues dans l'espace projectif $n+1$ dimensionnel P_{n+1}, alors la transformation T, régulière biunivoque de V_n sur V_n^* conservant tous les invariants projectifs déterminés sur V_n et V_n^*, est une transformation projective de P_{n+1}.

Nous disons ici qu'une transformation T déterminée sur l'ensemble $A \subset V$ appartient au groupe de transformations G de V, s'il existe $T' \epsilon G$ identique à T sur A.

Le théorè démontré ne reste plus vrai pour les surfaces de classe $C^{(0)}$, même convexes, ce que montre l'exemple du plan brisé dans l'espace affine 3-dimensionnel.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Fihtenholc, I. M., *Курс дифференциалного и интегралного исчисления, Vol. I* Moskwa-Leningrad, 1948 .

[2] Norden, A. P., *Пространства аффинной связности*, Moskwa-Leningrad 1950.

[3] Segre, B., *Some properties of differentiable varieties and transformations*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1957.

Streszczenie

W pracy dowodzi się następującego twierdzenia:

Niech dane będą dwie n-wymiarowe, nie będące zbiorami płaskimi, powierzchnie V_n i V_n^* klasy $C^{(3)}$, zanurzone w $n+1$ wymiarowej przestrzeni rzutowej P_{n+1}. Jeśli odwzorowanie wzajemne jednoznaczne regularne T

powierzchni V_n na V_n^* przeprowadza $(n-1)$-wymiarowe płaskie rozmaitości $V_{n-1} \subset V_n$, $V_{n-1} \subset P_n$, w $(n-1)$-wymiarowe płaskie rozmaitości $V_{n-1}^* \subset V_n^*$, $V_{n-1}^* \subset P_n^*$, (gdzie P_n i P_n^* są płaszczyznami n-wymiarowymi), to istnieje odwzorowanie rzutowe T' przestrzeni P_{n+1} identyczne z T na V_n.

Резюме

В работе доказывается следующая теорема.
Даны две n—мерные поверхности V_n и V_n^* класса $C^{(3)}$ в $(n+1)$-мерном проективном пространстве P_{n+1}, не являющиеся плоскими множествами. Если отображение взаимно однозначного T поверхности V_n на V_n^* переводит все $(n-1)$-мерные плоские многообразия $V_{n-1} \subset V_n$, $V_{n-1} \subset P_n$ в $(n-1)$-мерные плоские многообразия $V_{n-1}^* \subset V_n^*$, $V_{n-1}^* \subset P_n^*$ (где P_n и P_n^* являются n-мерными плоскостями), то существует проективное отображение T' пространства P_{n+1}, идентичное T на V_n.