ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA

VOL. XVII, 15 SECTIO A 1963

Z Zespołowej Katedry Matematyki Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr Adam Bielecki

KONSTANTY RADZISZEWSKI

Sur certaines propriétés des courbes admettant des plans osculateurs orientés

O pewnych własnościach krzywych posiadających płaszczyzny ściśle styczne zorientowane

О некоторых свойствах кривых допускающих ориентируемые соприкасающиеся плоскости

Introduction. Notations.

Dans les travaux [1] et [2] nous avons introduit la notion d'orientation pour huit différents types de plans osculateurs [3] d'une courbe donnée dans l'espace euclidien à 3 dimensions. Les plans osculateurs orientés jouent un rôle important dans la théorie de la courbure intégrale [4], [5], et aussi dans celle de la torsion intégrale des courbes. En particulier, l'existence d'une torsion intégrale dépend des conditions qu'impose à la courbe l'existence d'un plan osculateur d'un type déterminé. C'est pourquoi il semble assez important d'étudier les conditions auxquelles doit satisfaire une courbe pour qu'elle admette un plan osculateur orienté.

Dans ce travail nous établissons certaines propriétés d'une courbe admettant un plan osculateur orienté de l'un des types I—VIII.

Dans ce travail nous utiliserons les notations et les notions définies dans le travail [2]. Nous considérons les plans osculateurs de la courbe $\langle A*B\rangle$ au point $M \epsilon \langle A*B\rangle$ n'étant pas le point intérieur d'un segment de droite ou d'un segment de droite deux fois recouvert. La notion de dièdre $[\alpha_1^+, \beta_1^+, \varepsilon]$, y jouera, de plus, un rôle fondamental. Soit un plan α et une droite l située dans ce plan, $l \subset \alpha$. La droite l partage le plan α en deux demi-plans α_1^+ et α_1^-. Les deux demi-plans α_1^+ et β_1^+, faisant un angle $\varepsilon \leqslant \pi$, limitent dans l'espace un domaine convexe fermé que nous désignerons par $[\alpha_1^+, \beta_1^+, \varepsilon]$. L'ensemble analogue ouvert sera noté $(\alpha_1^+, \beta_1^+, \varepsilon)$. Le vecteur $\overline{AB} \subset [\alpha_1^+, \beta_1^+, \varepsilon]$, s'il existe un vecteur $\overline{A'B'} = \overline{AB}$ tel que $A' \epsilon l$ et $B' \epsilon [\alpha_1^+, \beta_1^-, \varepsilon]$.

L'ensemble de tous les vecteurs paratingents $\overline{p}(M)$ d'une courbe donnée $\langle A*B \rangle$ au point $M \epsilon \langle A*B \rangle$ sera désigné par $\overline{\mathscr{P}}(M)$.

Les symboles $\overline{\alpha}_{\mathrm{I}}(M), \overline{\alpha}_{\mathrm{II}}(M), \ldots, \overline{\alpha}_{\mathrm{VIII}}(M)$ désigneront toujours le plan osculateur orienté du type I, II, ..., VIII, de la courbe $\langle A*B \rangle$ au point $M \epsilon \langle A*B \rangle$, tandis que $\alpha_{\mathrm{I}}(M), \alpha_{\mathrm{II}}(M), \ldots, \alpha_{\mathrm{VIII}}(M)$ seront les plans analogues non orientés.

Par $U(M, \varepsilon)$ sera désigné un voisinage (c'est-à-dire un arc ouvert) du point M sur la courbe donnés, dépendant d'un paramètre ε.

Propriétés des courbes

I. Théorème I_1. Pour que la courbe $\langle A*B \rangle$ admette au point M un plan $\overline{\alpha}_{\mathrm{I}}(M)$ il faut et il suffit:

a) que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toutes les droites paratingentes $p(M)$ de la courbe $\langle A*B \rangle$ au point M il existe un voisinage $U(M, \varepsilon) \subset \langle A*B \rangle$ et un dièdre $[\alpha_{p(M)}^+, \beta_{p(M)}^+, \varepsilon]$, tels que $U(M, \varepsilon) \subset [\alpha_{p(M)}^+, \beta_{p(M)}^+, \varepsilon]$.

b) que le paratingent $\overline{\mathscr{P}}(M)$ ne contienne pas de vecteurs $\overline{p}_1$ et $\overline{p}_2$ tels que $\overline{p}_1 = -\overline{p}_2$.

Démonstration. Supposons que les conditions a) et b) sont satisfaites. Alors, un voisinage du point M est un arc simple de Jordan. Le paratingent $\overline{P}(M)$ est un continu (cela résulte de [6] p. 164). Remarquons que a) et b) entrainent l'existence d'une tantgente $t^+(M)$ de la courbe $\langle M*B \rangle$ au point M car s'il existait deux vecteurs contingents $\overline{t}_1$ et $\overline{t}_2$, il y aurait au moins deux plans, passant par M et perpendiculaires au plan (t_1, t_2) qui couperaient $(M*B)$ en une infinité de points $Q_n \to M$ ([6], p. 113). Il existerait alors un vecteur contingent $\overline{t}_3$ contenu dans l'angle $\sphericalangle(\overline{t}_1, \overline{t}_2)$ et le dièdre $[\alpha_{t_3}^+, \beta_{t_3}^+, \varepsilon]$ ne pourrait contenir tout l'arc $U(M, \varepsilon)$.

D'une manière analogue, si $\overline{\alpha}_{\mathrm{I}}$ existait et si la courbe admettait deux vecteurs contingents à droite, alors, puisque $\overline{t}_1 \times \overline{t}_2 \neq \overline{t}_2 \times \overline{t}_1$, $\overline{\alpha}_{\mathrm{I}}$ ne pourrait exister.

La condition a) est nécessaire, car s'il n'existe pas un dièdre $[\alpha_{t^+(M)}^+, \beta_{t^+(M)}^+, \varepsilon]$ contenant un arc $U(M, \varepsilon)$, alors la courbe couperait au moins deux plans passant par $t^+(M)$ dans un ensemble infini de points.

La nécessité de la condition b) se déduit immédiatement: si $\overline{p}_1 = -\overline{p}_2$, les vecteurs $\overline{p}_1 \times \overline{MP}/|\overline{p}_1 \times \overline{MP}|$ et $\overline{p}_2 \times \overline{MP}/|\overline{p}_2 \times \overline{MP}|$ auraient des limites différentes at le plan orienté $\overline{\alpha}_{\mathrm{I}}(M)$ ne pourrait exister.

Les conditions sont suffisantes. Supposons, en effet, que $(p_1(M), MQ_n') \to \alpha'$, $(p_2(M), MQ_n) \to \alpha''$ et a), b) sont remplis. Soit $Q_n', Q_n'' \epsilon (M*B)$ et soit un arc $\langle M*R \rangle \subset \langle M*B \rangle$ qui n'est pas un segment de droite. Si

$p_1 \neq p_2$; $p_1, p_2 \neq t^+(M)$, on a $\alpha' = \alpha''$. Admettons dons que $p_2 = t^+(M) = \lim MQ_n$. Alors on a $(p_1, p_2) = \alpha'$.

Supposons que

$$(1) \qquad U(M,\varepsilon) \subset [\alpha^+_{p_1}, \beta^+_{p_1}, \varepsilon] \quad \text{et} \quad U(M,\varepsilon) \subset [\alpha^+_{p_2}, \beta^+_{p_2}, \varepsilon]$$

d'où

$$p_2 \subset [\alpha^+_{p_1}, \beta^+_{p_1}, \varepsilon] + [\alpha^-_{p_1}, \beta^-_{p_1}, \varepsilon]$$

et évidemment

$$(2) \qquad \begin{aligned} \alpha'' &\subset [\alpha^+_{p_2}, \beta^+_{p_2}, \varepsilon] + [\alpha^-_{p_2}, \beta^-_{p_2}, \varepsilon], \\ \alpha' &\subset [\alpha^+_{p_1}, \beta^+_{p_1}, \varepsilon] + [\alpha_{p_1}, \beta_{p_1}, \varepsilon]. \end{aligned}$$

La courbe $U(M,\varepsilon)$ admet aussi les vecteurs paratingents: $\overline{p} = \lambda\overline{p}_1 + \mu\overline{p}_2$,

Par hypothèse

$$(3) \qquad U(M,\varepsilon) \subset [\alpha^+_p, \beta^+_p, \varepsilon] \quad \text{et} \quad p_1, p_2 \subset [\alpha^+_p, \beta^+_p, \varepsilon] + [\alpha^-_p, \beta^-_p, \varepsilon].$$

Mais, si $\lambda \to 0$, (2) et (3) entraînerait, (a cause de $\alpha' \neq \alpha''$), pour ε assez petits

$$([\alpha^+_{p_2}, \beta^+_{p_2}, \varepsilon] + [\alpha^-_{p_2}, \beta^-_{p_2}, \varepsilon]) \cap ([\alpha^+_p, \beta^+_p, \varepsilon] + [\alpha^-_p, \beta^-_p, \varepsilon]) \to p_2$$

et, d'après (3) et (1)

$$U(M,\varepsilon) \subset p_2$$

en contradiction avec l'hypothèse.

Si maintenant $Q_n \epsilon \langle A*B)$ et $Q''_n \epsilon (M*B\rangle$, alors dans le cas où $\overline{t}^-(M) = \overline{t}^+(M)$ ou $\overline{t}^-(M) \neq \overline{t}^+(M)$ la démonstration, en vertu du théorème I_2 et des résultats précédants, est évidente.

L'existence de $\overline{a}_1$ résulte de fait que $U(M,\varepsilon) \subset [\alpha^+_{p(M)}, \beta^+_{p(M)}, \varepsilon]$.

Le paratingent de la courbe $\langle A*B\rangle$ au point M ne contenant pas tout le plan, on peut en appeler au théorème I_1 et à [6] p. 81, et énoncer le théorème suivant:

Théorème I_2. Si la courbe $\langle A*B\rangle$ admet au point $M \epsilon \langle A*B\rangle$ un plan osculateur orienté du type I, a) on peut, en admettant le plan xOy pour plan ne contenant pas de droites paratingentes, représenter la courbe $\langle A*B\rangle$ dans le voisinage du point $M(0,0,0)$ sous la forme

$$y = \varphi(x) \qquad z = \psi(x)$$

où $\Delta\varphi/\Delta x$ et $\Delta\psi/\Delta x$ sont bornés.

b) Dans le voisinage du point M la courbe $\langle A*B\rangle$ est un arc simple de Jordan et admet des tangents unilatérales au point M, t^- et t^+ tels que $\overline{t}^+ \neq -\overline{t}^-$.

c) Si la courbe $\langle A*B\rangle$ admet au point intérieur M une tangente $t(M)$, alors $t(M)$ est une tangente au sens strict.

II. **Théorème II.** Pour qu'il existe un plan $\bar{a}_{II}$ au point M de la courbe $\langle A*B\rangle$ il faut et il suffit:

a) que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des arcs $\langle P'_\varepsilon * M\rangle \subset \langle A*M\rangle$, $\langle M*P''_\varepsilon\rangle \subset \langle M*B\rangle$ et des dièdres $[a^+_{P'M}, \beta^+_{P'M}, \varepsilon]$ et $[a^+_{MP''}, \beta^+_{MP''}, \varepsilon]$ tels que $\langle P'_\varepsilon * M\rangle \subset [a^+_{MP''}, \beta^+_{MP''}, \varepsilon]$, $\langle M*P''_\varepsilon\rangle \subset [a^+_{MP'}, \beta^+_{MP'}, \varepsilon]$ pour tous les $P' \in \langle P'_\varepsilon * M)$, $P'' \in (M*P''_\varepsilon\rangle$, où $P'_\varepsilon P''_\varepsilon \to M$ pour $\varepsilon \to 0$

b) que toutes les limites $a^+_{l^+}$ et $a^+_{l^-}$ des dièdres $[a^+_{MP''}, \beta^+_{MP''}, \varepsilon]$ et $[a^+_{MP'}, \beta^+_{MP'}, \varepsilon]$ respectivement soient contenues, pour $\varepsilon \to 0$, dans un plan fixé a.

Démonstration. La nécessité de ces conditions est évidente, car s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que l'arc $\langle P'_\varepsilon * M\rangle$ a des points situés de part et d'autre de l'ensemble $[a^+_{MP''}, \beta^+_{MP''}, \varepsilon] + [a^-_{MP''}, \beta^-_{MP''}, \varepsilon]$ ou intérieurs à $[a^-_{MP''}, \beta^-_{MP''}, \varepsilon]$ et $[a^+_{MP''}, \beta^+_{MP''}, \varepsilon]$ alors le plan $\bar{a}_{II}$ n'existerait pas.

Les conditions sont suffisantes. En effet, supposons que $(P'_n, M, Q'_n) \to a'$, et $(P''_n, M, Q''_n) \to a''$. Si $a' \neq a''$, les dièdres $[a^+_{MQ'_n}, \beta^+_{MQ'_n}, \varepsilon]$ et $[a^+_{MQ''_n}, \beta^+_{MQ''_n}, \varepsilon]$ n'auraient pas de limites situées dans un plan commun, car ils ont des points non colinéaires en commun avec les plans (P'_n, M, Q'_n) et (P''_n, M, Q''_n). La contradiction avec l'hypothèse prouve que $a' = a''$.

On voit immédiatement que a_{II} est orienté. En effet, si γ_n désigne le plan passant par $P'_n M$ et perpendiculaire à a_{II}, l'arc $(M*P''_n)$ ne peut pas passer d'un côté du plan γ_n à l'autre (sinon l'arc $\langle M*P''_\varepsilon\rangle$ ne serait pas contenu dans $[a^+_{MP'_n}, \beta^+_{MP'_n}, \varepsilon]$. Donc a_{II} est orienté.

III. **Théorème III₁.** Pour qu'il existe un plan $\bar{a}_{III}$ au point M de la courbe $\langle A*B\rangle$ il faut et il suffit:

a) que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage $U^+(M, \varepsilon) \subset \langle M*B\rangle$ et $U^-(M, \varepsilon) \subset \langle A*M\rangle$, et un dièdre $[a^+_{\bar{p}(M)}, \beta^+_{\bar{p}(M)}, \varepsilon]$ tels que $\bar{p}(Q') \subset [a^-_{\bar{p}(M)}, \beta^-_{\bar{p}(M)}, \varepsilon]$, $\bar{p}(Q'') \subset [a^+_{\bar{p}(M)}, \beta^+_{\bar{p}(M)}, \varepsilon]$ pour tous les vecteurs paratingents $\bar{p}(M)$, $\bar{p}(Q')$, $\bar{p}(Q'')$ et $Q' \in U^-(M, \varepsilon)$, $Q'' \in U^+(M, \varepsilon)$.

b) que le paratingent $\bar{P}(M)$ ne contienne pas de vecteurs $\bar{p}_1$ et $\bar{p}_2$ tels que $\bar{p}_1 = -\bar{p}_2$.

Démonstration. Remarquons que si la condition b) est vérifiée, la courbe est un arc simple de Jordan dans un voisinage du point M.

Des conditions a) et b) il résulte que la courbe $\langle M*B\rangle$ admet une tangentes au sens strict au point M. En effet, de la condition a) il s'ensuit que le paratingent des vecteurs au point M est plan. Comme $\bar{\mathscr{P}}(M)$ est un continu [6], p. 164, si p_1 et p_2 sont les vecteurs paratingents en M, le vecteur p_3 situé entre eux sera aussi paratingent. Mais alors le dièdre $[a^+_{p_3}, \beta^+_{p_3}, \varepsilon]$ ne peut pas contenir simultanément les vecteurs $\bar{p}_1$ et $\bar{p}_2$.

D'une manière analogue, si le plan orienté $\bar{\alpha}_{III}$ existe en M, la courbe admet en ce point des vecteurs tangents unilatéraux au sens strict.

La nécessité des conditions a) et b) en résulte immédiatement.

Nous allons maintenant prouver qu'elles sont suffisantes. Soit $Q'_n \in (M*B\rangle$ et $Q''_n \in (M*B\rangle$. Lorsque $\bar{p}(M) \neq \bar{t}^+(M)$, alors $\{\bar{p}(M), \bar{p}(Q'_n)\}$ et $\{\bar{p}(M), \bar{p}(Q''_n)\}$ tendent vers une même limite, qui est $\{\bar{t}^-(M), \bar{t}^+(M)\}$.

Supposons que $(t^+(M), p(Q'_n)) \to \alpha'$ et $(t^+(M), p(Q''_n)) \to \alpha'' \neq \alpha'$. Alors pour $\varepsilon = 1/3 \sphericalangle (\alpha', \alpha'')$ le dièdre $(\alpha^+_{t^+(M)'}, \beta^+_{t^+(M)'}, \varepsilon)$ ne peut avoir de points communs avec les plans α' et α'' en même temps. D'autre part, si $\alpha' = \alpha''$, et $\bar{\alpha}' \neq \bar{\alpha}''$, les vecteurs $\bar{p}(Q'_n)$ et $\bar{p}(Q''_n)$ seront situés de part et d'antre du plan γ passant par $t^+(M)$ et perpendiculaire à α', et on arrive à une contradiction analogue. Evidemment le plan α' se confond avec $(t^-(M), t^+(M))$, car si les plans $(t^+(M), p(Q'_n))$ tendaient vers le plan $\alpha' \neq (t^-(M), t^+(M))$, les dièdres $[\alpha^+_{p(M)}, \beta^+_{p(M)}, \varepsilon]$ contiendraient tous les $\bar{p}(Q)$, $Q \in (M*Q_\varepsilon\rangle \subset (M*B\rangle$, $\bar{t}^+(M)$ inclusivement, et lorsque $\bar{p}(M)$ tend vers $\bar{t}^+(M)$, le vecteur $\bar{p}(Q)$ se trouverait à l'extérieur du dièdre $[\alpha^+_{p(M)}, \beta^+_{p(M)}, \varepsilon]$, en contradiction avec a). Evidemment $\{\bar{t}^-(M), \bar{t}^+(M)\} = \lim\limits_{Q_n \to M} \{\bar{t}^+(M), \bar{p}(Q_n)\}$.

On prouve d'une manière analogue que le plan à gauche est égal au plan à droite, si $t^+(M) = t^-(M)$.

Théorème III$_2$. Si la courbe $\langle A*B\rangle$ admet au point $M \in \langle A*B\rangle$ un plan osculateur orienté du type III, alors:

a) La courbe $\langle A*B\rangle$ admet au point M des tangentes, $\bar{t}^-(M)$ et $\bar{t}^+(M), \bar{t}^-(M) \neq -\bar{t}^+(M)$, unilatérales au sens strict

b) son indicatrice sphérique par les tangentes aux points correspondant aux tangentes $\bar{t}^-(M)$ et $\bar{t}^+(M)$ admet des vecteurs tangents unilatéraux.

IV. **Théorème IV$_1$.** Pour qu'il existe un plan $\bar{\alpha}_{IV}$ au point M de la courbe $\langle M*B\rangle$ il faut et il suffit:

a) que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage $U(M, \varepsilon) \subset (M*B\rangle$ et un dièdre $[\alpha^+_{MP}, \beta^+_{MP}, \varepsilon]$ tels que l'arc $U(M, \varepsilon) - (M*P) \subset [\alpha^+_{MP}, \beta^+_{MP}, \varepsilon]$ pour tous les $P \in U(M, \varepsilon)$.

Démonstration. La nécessité s'établit immédiatement: en effet, s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que dans tout voisinage $(M*Q_n)$ il existe des points P_n tels que l'arc $(M*Q_n) - (M*P_n)$ n'est contenu dans aucun dièdre $[\alpha^+_{MP_n}, \beta^+_{MP_n}, \varepsilon]$, le plan orienté $\bar{\alpha}_{IV}$ ne peut exister.

La condition est suffisante. En effet, remarquons que la courbe satisfaisant à la condition a) admet une tangente en M car si les vecteurs $\bar{t}_1$ et $\bar{t}_2$ étaient des vecteurs contingents différents, le plan γ passant par M et par les points intérieurs de l'angle $\sphericalangle(\bar{t}_1, \bar{t}_2)$ et perpendiculaire au plan (t_1, t_2) couperait la courbe aux points $Y_n \to M$ (en vertu de [6], p. 113), et le dièdre $[\alpha^+_{MY_n}, \beta^+_{MY_n}, \varepsilon]$ ne pourrait contenir en même temps les points Y'_n et Y''_n, $MY'_n \to t_1$, $MY''_n \to t_2$, pour ε fixé, suffisamment petit.

Supposons que $(M, P'_n, P''_n) \to a'$ et $(M, Q'_n, Q''_n) \to a''$, $P'_n, P''_n, Q'_n, Q''_n \epsilon \langle M*B \rangle$. Soit $\varepsilon = 1/5(a', a'')$. Evidemment

$$(M, P'_n, P''_n) \subset [a^+_{MP'_n}, \beta^+_{MP'_n}, \varepsilon] + [a^-_{MP'_n}, \beta^-_{MP'_n}, \varepsilon]$$

$$(M, Q'_n, Q''_n) \subset [a^+_{MQ'_n}, \beta^+_{MQ'_n}, \varepsilon] + [a^-_{MQ'_n}, \beta^-_{MQ'_n}, \varepsilon]$$

Lorsque $P'_n, Q'_n \to M$, on obtient à la limite

$$a' \subset [a^+_{t_1}, \beta^+_{t_1}, \varepsilon] + [a^-_{t_1}, \beta^-_{t_1}, \varepsilon]$$

$$a'' \subset [a^+_{t_1}, \beta^+_{t_1}, \varepsilon] + [a^-_{t_1}, \beta^-_{t_1}, \varepsilon]$$

et la définition de ε montre que cela est impossible, si $U(M, \varepsilon)$ n'est pas un segment de droite.

On voit immédiatement que a_{IV} est orienté. Sinon, les points $P_n \epsilon \langle M*B \rangle$, $n = 1, 2, \ldots$, seraient situés des côtés positif et négatif des plans γ_n (si S est un point fixé sur a_{IV}, n'appartenant pas à la tangente $t(M)$, on appelle positif le côté du plan γ_n qui contient S) passant par MP'_n et perpendiculaire aux plans (M, P'_n, P''_n), $P'_n \epsilon (M*P''_n)$, $(M*P''_n) \subset \langle M*B \rangle$. Alors les dièdres $[a^+_{MP'_n}, \beta^+_{MP'_n}, \varepsilon]$ seraient aussi situés de part et d'autre de plan γ_n, ce qui est impossible, car si $Q \epsilon U(M, \varepsilon) - (M*P'_n)$ est contenu dans $[a^+_{MP'_n}, \beta^+_{MP'_n}, \varepsilon]$, tout l'arc $U(M, \varepsilon) - (M*Q)$ est contenu dans $[a^+_{MP'_n}, \beta^+_{MP'_n}, \varepsilon]$.

Théorème IV$_2$. Si la courbe $\langle M*B \rangle$ admet au point M un plan osculateur orienté du type IV, alors:

a) elle admet en M une tangente;

b) le paratingent en M est plan;

c) le paratingent des vecteurs en M et un voisinage de M sont situés d'un même côté du plan γ passant par la tangente en M et perpendiculaire à $a_{\mathrm{IV}}(M)$.

d) l'existence de $\bar{a}_{\mathrm{IV}}$ n'entraîne pas d'existence de $\bar{a}_{\mathrm{I}}$.

V. **Théorème V.** Pour que la courbe $\langle M*B \rangle$ admette un plan $\bar{a}_{\mathrm{V}}$ au point M, il faut et il suffit:

a) que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage $U(M, \varepsilon) \subset \langle M*B \rangle$ du point M et un dièdre $[a^+_{MP}, \beta^+_{MP}, \varepsilon]$, $P \epsilon \langle M*B \rangle$, tels que $[a^+_{MP}, \beta^+_{MP}, \varepsilon] + [a^-_{MP}, \beta^-_{MP}, \varepsilon] \to a$, lorsque $\varepsilon \to 0$ et $P \to M$, et que $\overline{\mathscr{P}}(Q) \subset [a^+_{MQ}, \beta^+_{MQ}, \varepsilon]$ pour tous les $Q \epsilon U(M, \varepsilon)$.

b) que si pour une suite partielle de P, $\lim [a^+_{MP}, \beta^+_{MP}, \varepsilon] = [a^+_t, a^+_t, 0]$, $\lim\limits_{P \to M} \overline{MP}/|\overline{MP}| = \bar{t}$, et $\bar{m}$, $|\bar{m}| = 1$, est un vecteur dont l'origine est sur t

et l'extrémité sur $[a_l^+, a_l^+, 0]$, $\overline{l}\cdot\overline{m} = 0$, alors $\overline{l}\times\overline{m} = \overline{N}$, où $\overline{N}$ est un vecteur fixé.

Démonstration. Le plan $(\overline{MQ}, \overline{p}(Q)) \subset [a_{MQ}^+, \beta_{MQ}^+, \varepsilon] + [a_{MQ}^-, \beta_{MQ}^-, \varepsilon] \to a$, donc de a) résulte l'existence de a_{V}. L'existence de $\overline{a}_{\mathrm{V}}$ résulte de b).

De l'existence $\overline{a}_{\mathrm{V}}$ il résulte a) et b) immédiatement.

VI. **Théorème VI$_1$.** Pour qu'il existe un des plans orientés $\overline{a}_{\mathrm{VI}}, \overline{a}_{\mathrm{VII}}, \overline{a}_{\mathrm{VIII}}$ de la courbe $\langle A*B\rangle$ au point M, il faut et il suffit

a) que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage $U(M, \varepsilon) \subset \langle A*B\rangle$ du point M et un dièdre $[a_{p(Q)}^+, \beta_{p(Q)}^+, \varepsilon]$ tels que $U(M, \varepsilon) \subset [a_{p(Q)}^+, \beta_{p(Q)}^+, \varepsilon]$ pour tous les vecteurs paratingents $\overline{p}(Q)$ de l'arc $U(M, \varepsilon)$.

Démonstration. Les plans $\overline{a}_{\mathrm{VI}}, \overline{a}_{\mathrm{VII}}, \overline{a}_{\mathrm{VIII}}$, [2] étant équivalents, nous établirons le théorème pour $\overline{a}_{\mathrm{VII}}$.

La nécessité de la condition est évidente.

Pour montrer qu'elle est suffisante, considérons tous les dièdres $[a_{p(X)}^+, \beta_{p(X)}^+, \varepsilon']$, $\varepsilon' > \varepsilon$, $X \in U(M, \varepsilon)$, contenant $U(M, \varepsilon)$. Soit

$$[a_{p(X)}^0, \beta_{p(X)}^0, \varepsilon] = \prod_{\varepsilon'>\varepsilon} [a_{p(X)}^+, \beta_{p(X)}^+, \varepsilon']$$

(c'est-à-dire l'ensemble commun), et

$$\Phi[U(M), \varepsilon] = \prod_{X\in U(M)} [a_{p(X)}^0, \beta_{p(X)}^0, \varepsilon],$$

où $U(M) \subset U(M, \varepsilon)$ est un entourage du point M. $\Phi[U(M), \varepsilon]$ sera un ensemble convexe tel que $U(M) \subset \Phi[U(M), \varepsilon]$. Evidemment $\Phi[U_1(M), \varepsilon] \subset \Phi[U_2(M), \varepsilon]$ pour $U_2(M) \subset U_1(M)$. Soit K une sphère de centre M et de rayon $r > 0$. Posons $\Phi_K[U(M), \varepsilon] = \Phi[U(M), \varepsilon] \cap K$.

Considérons l'arc $\langle P_n'*P_n''\rangle$, $P_n' \in \langle A*M\rangle$, $P_n'' \in (M*B\rangle$. Soit $\Phi_K(\varepsilon) = \lim \Phi_K[(P_n'*P_n''), \varepsilon]$ pour une suite convergente $\Phi_K[(P_n'*P_n''), \varepsilon]$ (son existence résulte d'un théorème de Blaschke [8], p. 124). Evidemment $\Phi_K[U(M), \varepsilon] \subset \Phi_K(\varepsilon)$ et

$$\Phi_K(\varepsilon) \subset [a_{p(M)}^+, \beta_{p(M)}^+, \varepsilon] = \lim_{p(X)\to p(M)} [a_{p(X)}^+, \beta_{p(X)}^+, \varepsilon]$$

(on peut extraire une suite partielle). $(P_n'P_n'' \to M)$.

Par suite, $\Phi_K = \lim \Phi_K(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$, est un ensemble contenu dans tous les plans $\gamma = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}([a_{p(M)}^+, \beta_{p(M)}^+, \varepsilon] + [a_{p(M)}^-, \beta_{p(M)}^-, \varepsilon])$ (on peut extraire une suite partielle).

Remarquons que la courbe $\langle M*B\rangle$ admet une tangente $t^+(M)$ en M (démonstration comme dans I$_1$). Nous allons prouver que $t^+(M)$ est une tangente au sens strict. Supposons que $p(M_n) \to p(M) \neq t^+(M)$. Soit $\langle M*R\rangle \subset [a_{p(M_n)}^+, \beta_{p(M_n)}^+, \varepsilon]$ $\lim MM_n = t^+(M)$, $\langle M*R\rangle \subset [a_{p(M_n)}^+, \beta_{p(M)}^+,$

$\varepsilon] = \lim[\alpha^+_{p(M_n)}, \beta^+_{p(M_n)}, \varepsilon]$. Puisque $M \in [\alpha^+_{p(M_n)}, \beta^+_{p(M_n)}, \varepsilon]$ et que la courbe $(M*R)$ n'a pas de points communs avec le plan γ passant par $p(M)$ et perpendiculaire au plan bissecteur de l'ensemble $[\alpha^+_{p(M)}, \beta^+_{p(M)}, \varepsilon]$ (sinon la tangente $t^+(M) \neq p(M)$ en M n'existerait pas), l'arc $\langle M*R\rangle$ est contenu dans un ensemble limité par le plan γ et $[\alpha^+_{p(M_n)}, \beta^+_{p(M_n)}, \varepsilon]$, (car $M \in \gamma$ donc $[\alpha^+_{p(M_n)}, \beta^+_{p(M_n)}, \varepsilon]$ coupe γ). Soit R_n le point d'intersection de $p(M_n)$ avec γ. Comme $\sphericalangle(R_nM_n, p(M)) \to 0$ et l'angle φ_n entre les demi-droites r^1_n et r^2_n d'intersection de $[\alpha^+_{p(M_n)}, \beta^+_{p(M_n)}, \varepsilon]$ avec γ tend vers 0, donc $\sphericalangle(MR_n, M_nR_n) \to 0$. Alors la courbe $\langle M*R\rangle$ est contenue dans le trièdre $[r^1_n, r^2_n, R_nM_n]$ qui tend vers une droite ou demi-droite et nous avons obtenu une contradiction.

Nous allons montrer que $\bar{t}^-(M) \neq -\bar{t}^+(M)$. Soit $\gamma(R')$ un plan passant par le point $R' \in \langle A*M\rangle$ et perpendiculaire à $t^+(M)$. Supposons que $\bar{t}^+(M) = -\bar{t}^-(M)$. Désignons par $R'' \in \langle M*B\rangle$ le point d'intersection de de $\gamma(R')$ avec l'arc $(M*B\rangle$. Soit $V(R') = [\alpha^+_{p(R')}, \beta^+_{p(R')}, \varepsilon] \frown [\alpha^+_{p(R'')}, \beta^+_{p(R'')}, \varepsilon]$. Evidemment $U(M, \varepsilon) \subset V(R')$. Posons $C(R') = V(R') \frown \gamma(R')$. $C(R')$ est un quadrilatère convexe dont les angles aux sommets opposés sont proches de ε, donc $C(R')$ est un quadrilatère fermé si ε est assez petit. Il en résulte que $V(R')$ tend vers $t^+(M)$ lorsque $R' \to M$, car $p(R')$ et $p(R'')$ tendent vers $t^-(M) = t^+(M)$. Par conséquant $U(M, \varepsilon) \subset t^+(M)$ et la contradiction ainsi obtenue prouve que $\bar{t}^-(M) \neq -\bar{t}^+(M)$.

De l'inégalité $\bar{t}^-(M) \neq -\bar{t}^+(M)$ il résulte que l'ensemble Φ_K ne peut se réduire à une droite. Il n'existe donc qu'un plan γ contenant Φ_K.

Si maintenant $X \in U(M, \varepsilon)$, $Y \in U(M, \varepsilon)$, on a $(p(X), Y) \subset [\alpha^+_{p(X)}, \beta^+_{p(X)}, \varepsilon] + [\alpha^-_{p(X)}, \beta^-_{p(X)}, \varepsilon]$ et $\alpha_0 = \lim_{p(X) \to t^+(M), Y \to M} (p(X), Y) \subset [\alpha^+_{\bar{t}^+(M)}, \beta^+_{\bar{t}^+(M)}, \varepsilon] + [\alpha^-_{\bar{t}^+(M)}, \beta^-_{\bar{t}^+(M)}, \varepsilon]$. Donc, nous avons $\alpha_0 = \gamma$.

L'existence de α_{VII} est ainsi établie.

Le plan α_{VII} est orienté: cela résulte du fait que $U(M, \varepsilon) \subset [\alpha^+_{p(X)}, \beta^+_{p(X)}, \varepsilon]$, $X \in U(M, \varepsilon)$. En effet, lorsque $p(X) \to p(M)$ les ensembles $[\alpha^+_{p(X)}, \beta^+_{p(X)}, \varepsilon]$ tendent vers l'ensemble $[\alpha^+_{p(M)}, \beta^+_{p(M)}, \varepsilon]$ contenant $U(M, \varepsilon)$ et le demi-plan α^+_{VII} du plan α_{VII}. Si α_{VII} n'était pas orienté alors $[\alpha^+_{p(X)}, \beta^+_{p(X)}, \varepsilon]$ tendrait vers les dièdres, dont l'un contient $U(M, \varepsilon)$ et l'autre ne contient pas $U(M, \varepsilon)$, car le produit vectoriel $\overline{p}(X) \times \overline{XY}/|\overline{p}(X) \times \overline{XY}|$ tendrait vers $\overline{N}$ et $-\overline{N}$, ce qui est imposible, puisque tous les $[\alpha^+_{p(X)}, \beta^+_{p(X)}, \varepsilon]$, donc aussi leur limite, contiennent $U(M, \varepsilon)$.

La contradiction achève la démonstration du théorème.

Théorème VI₂. Si la courbe $\langle A*B\rangle$ a au point M un plan osculateur orienté de l'un des types VI, VII, VIII, alors

a) la courbe $\langle A*B\rangle$ admet au point M des vecteurs tangents unilatéraux au sens strict $\bar{t}^+(M)$, $\bar{t}^-(M)$, et $\bar{t}^-(M) \neq -\bar{t}^+(M)$

b) l'indicatrice sphérique par les tangentes aux points correspondants aux vecteurs $\bar{t}^{+}(M)$ et $\bar{t}^{-}(M)$ admet des vecteurs tangents unilatéraux au sens strict, donc est rectifiable dans un voisinage de ces points. ([7], p. 101)

BIBLIOGRAPHIE:

[1] K. Radziszewski, Sur les plans osculateurs orientés, Ann. Pol. Math., XII (1962), p. 159-169.

[2] K. Radziszewski, Sur les relations entre les plans osculateurs orientés, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, XVII (1963)

[3] E. J. van der Waag, Sur les plans osculateurs, I, II, Indagationes Mathematicae 14 (1952), p. 41-62.

[4] K. Radziszewski, Sur la courbure intégrale d'une classe de courbes, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, XVI (1962),

[5] K. Radziszewski, Sur un théorème de Pogorielov, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, XVI (1962),

[6] G. Bouligand, Introduction à la géométrie infinitésimale directe, Paris 1932.

[7] Ch. Pauc, Les méthodes directes en géométrie différentielle, Paris 1941.

[8] W. Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig, 1916.

Streszczenie

W pracy bada się jakie własności krzywej wynikają z istnienia płaszczyzny ściśle stycznej zorientowanej określonego typu w sensie van der Waaga. Płaszczyzny ściśle styczne są określone przez wektory paratyngensowe danej krzywej.

Резюме

В этой работе даются условия необходимые и достаточные существования орентируемых соприкасающихся плоскостей используя угол между двумя плоскостями.

Даются свойства кривых допускающих орентируемые соприкасающиеся плоскости определенные паратенгенцией кривой.