ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA

VOL. XVI, 13 SECTIO A 1962

Z Katedry Zespołowej Matematyki Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr Adam Bielecki

ТАТЬЯНА Г. ЭЗРОХИ

Об аналитических функциях обобщенных классов Шильда

O funkcjach analitycznych uogólnionych klas Schilda

Sur les fonctions analytiques appartenant aux classes de Schild généralisées

В настоящей заметке устанавливаются некоторые оценки для классов функций, регулярных в круге $|z| \leqslant 1$ и круговой области $1 \leqslant |z| < +\infty$ являющихся обобщением классов, введенных Шильдом [3] и Левандовским [2].

I

Будем рассматривать класс Sh_p регулярных в круге $|z| \leqslant 1$ функций

$$f(z) = z^p - \sum_{n=2}^{\infty} a_{p+n-1} z^{p+n-1}, \quad (p \text{ целое}, \geqslant 1) \tag{1}$$

для которых $a_{p+n-1} \geqslant 0$ и

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{p+n-1}{p} a_{p+n-1} = 1. \tag{2}$$

Это подкласс p-листных звёздных в $|z| \leqslant 1$ функций.

Справедлива следующая

Теорема. *Если d_0 радиус круга, покрываемого образом круга $|z| \leqslant r_0$ при отображении $w = f(z) \in Sh_p$, где r_0 радиус выпуклости функции $f(z)$, а D_0 — радиус круга, покрываемого образом круга $|z| \leqslant 1$ при том же отображении, то*

$$\min_{f \in Sh_p} \frac{d_0}{D_0} = (p+1)\left(\frac{p}{p+1}\right)^p \left[1 - \left(\frac{p}{p+1}\right)^2\right], \tag{3}$$

причем оценка достигается функцией

$$f(z) = z^p - \frac{p}{p+1} z^{p+1} \tag{4}$$

и только ею.

Доказательство. Сформулированная теорема была доказана ранее нами для случая $p = 1$[1]. Приведенный в настоящей заметке метод позволяет доказать более общее утверждение: Пусть $f(z) \in Sh_p$, а r_m корень уравнения

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{p+n-1}{p}\right)^m a_{p+n-1} r_m^{n-1} = 1 \qquad (m > 1) \tag{5}$$

Тогда

$$\min_{f \in Sh_p} \frac{r_m^p - \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_{p+n-1} r_m^{p+n-1}}{1 - \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_{p+n-1}} = (p+1)\left(\frac{p}{p+1}\right)^{p(m-1)} \left[1 - \left(\frac{p}{p+1}\right)^m\right],$$

причем оценка достигается функцией (4) и только ею.

Действительно, в силу условия (5),

$$\eta_{m,p} = \frac{r_m^p - \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_{p+n-1} r_m^{p+n-1}}{1 - \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_{p+n-1}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_{p+n-1} \left[\left(\frac{p+n-1}{p}\right)^m - 1\right] r_m^{p+n-1}}{\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_{p+n-1} \left[\left(\frac{p+n-1}{p}\right)^m r_m^{n-1} - 1\right]},$$

Отсюда следует, что

$$\eta_{m,p} \geqslant \frac{\sum\limits_{n=2}^{\infty}{}' a_{p+n-1} \left[\left(\frac{p+n-1}{p}\right)^m - 1\right] r_m^{p+n-1}}{\sum\limits_{n=2}^{\infty}{}' a_{p+n-1} \left[\left(\frac{p+n-1}{p}\right)^m r_m^{n-1} - 1\right]}, \tag{6}$$

где штрих означает, что сумма распространена на те значения, для которых $\left(\frac{p+n-1}{p}\right)^m r_m^{n-1} - 1 > 0$ t. e. $r_m > \left(\frac{p}{p+n-1}\right)^{\frac{m}{n-1}} = t_n$. Так

[1] Левандовским [2] была доказана аналогичная теорема для класса полимонов Шильда, т. е. полимонов вида $f(z) = z - \sum\limits_{n=2}^{N} a_n z^n$ где $a_n \geqslant 0$ и $\sum\limits_{n=2}^{N} n a_n = 1$.

как функция $[p/(p+x-1)]^{m/(n-1)}$, монотонно возрастая на промежутке $\langle 2, +\infty)$, изменяется от $[p/(p+1)]^m$до 1, то $[p/(p+1)]^m < t_n < 1$.

Применяя к выражению (6) лемму, доказанную в работе [1] на стр. 295, имеем

$$\eta_{m,p} \geqslant \inf \frac{\left[\left(\dfrac{p+n-1}{p}\right)^m - 1\right] r_m^{p+n-1}}{\left(\dfrac{p+n-1}{p}\right)^m r_m^{n-1} - 1},$$

где r_m удовлетворяет условию (5).

Исследуем функцию

$$\varphi(t) = \frac{t^{p+n-1}\left[\left(\dfrac{p+n-1}{p}\right)^m - 1\right]}{\left(\dfrac{p+n-1}{p}\right)^m t^{n-1} - 1}$$

на промежутке $\langle t_n, 1\rangle$. Нетрудно проверить, что на этом промежутке функция имеет минимум при $t = \left(\dfrac{p}{p+n-1}\right)^{\frac{m-1}{n-1}}$, причем этот минимум равен

$$\frac{p}{n-1}\left[\left(\frac{p}{p+n-1}\right)^{\frac{p(m-1)+1-n}{n-1}} - \left(\frac{p}{p+n-1}\right)^{\frac{(m-1)(p+n-1)}{n-1}}\right] \tag{7}$$

и является точным значением $\eta_{m,p}$ для следующей функции

$$f(z) = z^p - \frac{p}{p+n-1} z^{p+n-1} \in Sh_p.$$

Остается найти номер n, при котором выражение (7) принимает минимальное значение. Для этого рассмотрим функцию

$$\psi(x) = \frac{1}{x-1}\left[\left(\frac{p}{p+x-1}\right)^{\frac{p(m-1)+1-x}{x-1}} - \left(\frac{p}{p+x-1}\right)^{\frac{(m-1)(p+x-1)}{x-1}}\right]$$

$(x > 1,\ m > 1)$. Для нее

$$\psi'(x) = \frac{m-1}{(x-1)^2}\left[\left(\frac{p}{p+x-1}\right)^{\frac{p(m-1)+1-x}{x-1}} - \left(\frac{p}{p+x-1}\right)^{\frac{(m-1)(p+x-1)}{x-1}}\right] \cdot$$

$$\cdot\left[-\frac{p}{x-1}\ln\frac{p}{p+x-1} - \frac{m}{m-1}\,\frac{\left(\dfrac{p+x-1}{p}\right)^{m-1} - 1}{\left(\dfrac{p+x-1}{p}\right)^m - 1}\right].$$

Покажем, что $\psi'(x) > 0$, т. е.

$$\frac{p}{x-1}\ln\frac{p+x-1}{p} > \omega(x, m),$$

где

$$\omega(x, m) = \frac{m}{m-1}\,\frac{\left(\dfrac{p+x-1}{p}\right)^{m-1}-1}{\left(\dfrac{p+x-1}{p}\right)^{m}-1}.$$

Отметим, прежде всего, что

$$\lim_{m\to 1}\omega(x, m) = \frac{p}{x-1}\ln\frac{p+x-1}{p}.$$

Поэтому достаточно доказать, что $\omega(x, m)$ есть монотонно убывающая функция параметра m на промежутке $\langle 1, +\infty)$. Мы имеем

$$\frac{d}{dm}\ln\omega(x, m) = \lambda(x, m-1) - \lambda(x, m),$$

где

$$\lambda(x, m) = \frac{\left(\dfrac{p+x-1}{p}\right)^{m}\ln\dfrac{p+x-1}{p}}{\left(\dfrac{p+x-1}{p}\right)^{m}-1} - \frac{1}{m}.$$

Кроме того,

$$\frac{d\lambda(x, m)}{dm} = \left(\frac{p+x-1}{p}\right)^{m}\cdot\frac{2\left[\operatorname{ch}\left(m\ln\dfrac{p+x-1}{p}-1\right)-m^2\ln^2\dfrac{p+x-1}{p}\right]}{m^2\left[\left(\dfrac{p+x-1}{p}\right)^{m}-1\right]^2} > 0.$$

Следовательно, $d\omega(x, m)/dm < 0$, что и требовалось доказать. Тогда

$$\min_{f\in Sh_p}\eta_{m,p} = (p+1)\left(\frac{p}{p+1}\right)^{p(m-1)}\left[1-\left(\frac{p}{p+1}\right)^{m}\right].$$

Из хода доказательства ясно, что этот минимум реализует функция (4) и только она.

II

Будем рассматривать класс Sh_p^* регулярных в области $1 \leqslant |z| < +\infty$ функций

(8) $$f(z) = z^p - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{p+n-1}}{z^{p+n-1}}, \; a_{p+n-1} \geqslant 0$$

для которых

(9) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p+n-1}{p} a_{p+n-1} = 1.$$

Известно [1], что функции класса Sh_p^* p-листные и звёздные в области $1 \leqslant |z| < +\infty$, т. е. для них выполняется условие $\Re(zf'/f) > 0$ в этой области.

Теорема. *Если d_0 радиус круговой области $d_0 \leqslant |w| < +\infty$, покрываемой образом круговой области $r_0 \leqslant |z| < +\infty$ при отображении $w = f(z) \in Sh_p^*$, где r_0 — радиус выпуклости функции $f(z)$, а D_0 — радиус круговой области, покрываемой образом круговой области $1 \leqslant |z| < +\infty$ при том же отображении, то d_0/D_0 принимает в Sh_p^* любое значение из $(1, +\infty)$.*

Для доказательства достаточно рассмотреть следующие примеры:

A. $$f(z) = z^p - \frac{p}{p+n-1} \frac{1}{z^{p+n-1}}.$$

Легко убедиться, что радиус выпуклости r_0 определяется из условия

(10) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p+n-1}{p}\right)^2 \frac{a_{p+n-1}}{r_0^{2p+n-1}} = 1.$$

Тогда для данной функции $r_0 = \left(\dfrac{p+n-1}{p}\right)^{\frac{1}{2p+n-1}}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_0}{D_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{p}{n-1}\left[\left(\frac{p+n-1}{p}\right)^{\frac{2p+n}{2p+n-1}} - \left(\frac{p}{p+n-1}\right)^{\frac{p+n-1}{2p+n-1}}\right] = 1.$$

B. $$f(z) = z^p - \frac{n-1}{p+n-1} \cdot \frac{1}{z^p} - \frac{p^2}{(p+n-1)^2} \cdot \frac{1}{z^{p+n-1}}.$$

В силу условия (10), имеем

$$\frac{n-1}{p+n-1} \cdot \frac{1}{r_0^{2p}} + \frac{1}{r_0^{2p+n-1}} = 1$$

и

$$\frac{d_0}{D_0}=\frac{r_0^p-\dfrac{n-1}{p+n-1}\cdot\dfrac{1}{r_0^p}-\dfrac{p^2}{(p+n-1)^2}\cdot\dfrac{1}{r_0^{p+n-1}}}{1-\dfrac{n-1}{p+n-1}-\left(\dfrac{p}{p+n-1}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{r_0^{p+n-1}}\cdot\frac{2p+n-1}{p}.$$

Можно показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d_0}{D_0}=\lim_{n\to\infty}\frac{2p+n-1}{pr_0^{p+n-1}}=+\infty.$$

III

Пусть B есть круг $|z|\leqslant 1$ с разрезом по отрезку $\langle -1,0\rangle$. Обозначим через S_i класс регулярных в области B функций

(11) $$f(z)=z^p-\int_b^{+\infty}z^{p+x-1}da(x),\quad (b\geqslant 2,\ p\geqslant 1),$$

для которых $a(x)$ неубывающая функция на промежутке $\langle 2,+\infty)$ и

(12) $$\int_b^{+\infty}\frac{p+x-1}{p}da(x)=1.$$

Если $p=1$, то функции класса S_i однолистны в полукруге $|z|\leqslant 1$, $\Re z>0$. Если $a(x)$ ступенчатая функция и $b=2$, то получаем класс Sh_p.

Для функций класса S_i можно установить теоремы, аналогичные тем, которые установил Шильд [3] для класса полимонов.

Теорема 1. *Функции $f(z)\in S_i$ звёздны в области B.*

Доказательство. Имеем

$$\Re\frac{zf'(z)}{f(z)}=\Re\frac{p-\int_b^{+\infty}(p+x-1)z^{x-1}da(x)}{1-\int_b^{+\infty}z^{x-1}da(x)}\geqslant p-\frac{\int_b^{+\infty}(x-1)|z|^{x-1}da(x)}{1-\int_b^{+\infty}|z|^{x-1}da(x)}=$$

$$=\frac{p-\int_b^{+\infty}(p+x-1)|z|^{x-1}da(x)}{1-\int_b^{+\infty}|z|^{x-1}da(x)}>0.$$

Теорема 2. *Граница выпуклости функций $f(z) \in S_i$ в B равна*

$$r_0 = \left(\frac{p}{p+b-1}\right)^{\frac{1}{b-1}}. \tag{14}$$

Оценка достигается функцией

$$f(z) = z^p - \frac{p}{p+b-1} z^{p+b-1}. \tag{15}$$

Доказательство. Мы имеем

$$\Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) = \Re\left[1 - \frac{\int\limits_b^{+\infty} \frac{p+x-1}{p}\frac{x-1}{p} z^{x-1} d\alpha(x)}{1 - \int\limits_b^{+\infty} \frac{p+x-1}{p} z^{x-1} d\alpha(x)}\right] p \geqslant$$

$$\geqslant p\left[1 - \frac{\int\limits_b^{+\infty} \frac{p+x-1}{p}\frac{x-1}{p} |z|^{x-1} d\alpha(x)}{1 - \int\limits_b^{+\infty} \frac{p+x-1}{p} |z|^{x-1} d\alpha(x)}\right] =$$

$$= p\,\frac{1 - \int\limits_b^{+\infty} \left(\frac{p+x-1}{p}\right)^2 |z|^{x-1} d\alpha(x)}{1 - \int\limits_b^{+\infty} \frac{p+x-1}{p} |z|^{x-1} d\alpha(x)}.$$

Для нахождения границы выпуклости достаточно найти минимальное значение r, для которого

$$\frac{p+x-1}{p} r^{x-1} \leqslant 1 \tag{16}$$

на промежутке $\langle 2, +\infty)$.

Из неравенства (16) находим $r \leqslant \left(\frac{p}{p+x-1}\right)^{1/(x-1)}$

Так как функция $\left(\frac{p}{p+x-1}\right)^{1/(x-1)}$ возрастает на промежутке $\langle 2, +\infty)$,

то $r_0 = \left(\frac{p}{p+b-1}\right)^{1/(b-1)}$.

Теорема 3. *Круг* $|w| \leqslant \frac{b-1}{p+b-1}$ *с разрезом по отрезку*

$$\left\langle -\frac{b-1}{p+b-1}, 0 \right\rangle$$

всегда покрывается образом области B лця функций $w = f(z) \in S_i$.

Доказательство.

$$|f(e^{i\varphi})| = \left| e^{ip\varphi} - \int_b^{+\infty} e^{i(p+x-1)\varphi} da(x) \right| \geqslant$$

$$\geqslant 1 - \int_b^{+\infty} da(x) \geqslant 1 - \frac{p}{p+b-1} = \frac{b-1}{p+b-1}.$$

Теорема 4. *Круг* $|w| \leqslant r_0^p(1-r_0^{2(b-1)})$ *с разрезом по отрезку* $\langle -r_0^p(1- -r_0^{2(b-1)}), 0\rangle$ *всегда покрывается образом круга* $|z| \leqslant r_0$ *с разрезом по отрезку* $\langle -r_0, 0\rangle$ *где* r_0 — *граница выпуклости функции класса* S_i, *для фукнций* $w = f(z) \in S_i$.

Действительно,

$$f(r_0 e^{i\varphi})| = |r_0^p e^{ip\varphi} - \int_b^{+\infty} r_0^{p+x-1} e^{i(p+x-1)\varphi} da(x)| \geqslant r_0^p -$$

$$- \int_b^{+\infty} r_0^{p+x-1} da(x) \geqslant r_0^p \left[1 - r_0^{b-1} \int_b^{+\infty} da(x)\right] \geqslant$$

$$\geqslant r_0^p[1 - r_0^{b-1} p/(p+b-1)] = r_0^p(1 - r_0^{2(b-1)}).$$

Теорема 5. *Пусть* r_m — *корень уравнения*

$$\int_b^{+\infty} \left(\frac{p+x-1}{p}\right)^m r_m^{x-1} da(x) = 1. \tag{17}$$

Тогда для выражения

$$\eta_{m,p} = \frac{r_m^p - \int_b^{+\infty} r_m^{p+x-1} da(x)}{1 - \int_b^{+\infty} da(x)} \tag{18}$$

в области B для всех $f \in S_i$ *справедливо неравенство*

$$\eta_{m,p} \geqslant \frac{p}{b-1} \left(\frac{p}{p+b-1}\right)^{\frac{p(m-1)}{b-1}} \left[\frac{p+b-1}{p} - \left(\frac{p}{p+b-1}\right)^{m-1}\right]. \tag{19}$$

Доказательство проводится точно так же, как и в I.

Указанное неравенство достигается, как легко убедиться, если функция $a(x)$ имеет одну точку роста при $x = b$, т. е. функцией (15).

Теорема 6. *Для функции $f \epsilon S_i$ и ее производной справедливы оценки*

$$
(20)\quad
\begin{aligned}
&|z|^p - \frac{p}{p+b-1}|z|^{p+b-1} \leqslant |f| \leqslant |z|^p + \frac{p}{p+b-1}|z|^{p+b-1},\\
&p|z|^{p-1} - p|z|^{p+b-2} \leqslant |f'| \leqslant p|z|^{p-1} + p|z|^{p+b-2}.
\end{aligned}
$$

Оценки реализируются функцией (15).

Действительно, в силу условия (12),

$$|f| \leqslant |z|^p + |z|^{p+b-1}\int_b^{+\infty} da(x) \leqslant |z|^p + \frac{p}{p+b-1}|z|^{p+b-1}.$$

Аналогично для производной.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Зморович, В. А., *О некоторых вариационных задачах теории однолистных функций*, Укр. Мат. Журнал, 4, 3 (1952), стр. 00-00.

[2] Lewandowski, Z., *Nouvelles remarques sur les théorèmes de Schild relatifs à une classe de fonctions univalentes (démonstration d'une hypothèse de Schild)* [*Дальнейшие замечания о теоремах Шильда, относящихся к некоторому классу однолистных функций (доказательство гипотезы Шильда)*], Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **10**, 8 (1956), 81-94.

[3] Schild, A., *On a class of functions schlicht in the unit circle* [*О некотром классе однолистных в единичном круге функций*], Proc. Amer. Proc. Amer. Math. Soc., **5**, 1 (1954), стр. 115-120.

[4] Эзрохи, Т. Г., *О некоторых классах p-листных функций*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **16**, 12 (1962), стр. 137.

МЕЖВУЗОВСКИЙ СЕМИНАР ПО ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ И ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПОД РУКОВОДСТВОМ ПРОФ. ДОКТОРА ФИЗ.-МАТ. НАУК, В. А. ЗМОРОВИЧА – КИЕВ.

Streszczenie

Zajmujemy się tu paroma klasami funkcji analitycznych, będącymi uogólnieniem tych, które zostały już dawniej wprowadzone przez A. Schilda [3] i Z. Lewandowskiego [2].

W rozdziale I rozpatrujemy klasę Sh_p złożoną ze wszystkich funkcji postaci (1), holomorficznych w kole jednostkowym domkniętym $\overline{C} = \{z: |z| \leqslant 1\}$ takich, że $a_{p+n-1} \geqslant 0$ i (2). Oznaczamy przez d_0 promień koła pokrytego obrazem $f(\overline{C}_{r_0})$ koła $\overline{C}_{r_0} = \{z: |z| \leqslant r_0\}$, gdzie r_0 oznacza promień wypukłości funkcji $f(z)$, a przez D_0 — promień koła pokrytego

przez $f(\bar{C})$. Dowodzimy nierówności (3) ważnej dla całej klasy Sh_p i stwierdzamy, że równość zachodzi jedynie dla funkcji (4).

W rozdziale II jest mowa o klasie Sh_p^* utworzonej z funkcji typu (8), holomorficznych w obszarze $\bar{C}^* = \{z: |z| \geqslant 1\}$ i czyniących zadość warunkowi (9); są one p-listne i gwiaździste w $\bar{C}^*$ [4].

Jeśli $d_0 > 0$ oznacza taką liczbę, że obszar $\{z: d_0 \leqslant |z| < +\infty\}$ jest pokryty przez obraz $f(\bar{C}^*_{r_0})$ obszaru $\bar{C}_{r_0} = \{z: |z| \geqslant r_0\}$, gdzie r_0 jest znowu promieniem wypukłości funkcji $f(z)$, i jeśli D_0 oznacza liczbę o tej własności, że obraz $f(\bar{C}^*)$ pokrywa obszar kołowy $\{z: D_0 \leqslant |z| < +\infty\}$, to okazuje się, że stosunek d_0/D_0 może w klasie Sh_p^*, przyjmować każdą wartość rzeczywistą dodatnią.

Niech B będzie kołem $|z| \leqslant 1$ rozciętym wzdłuż odcinka $\langle -1, 0\rangle$, a S_i zbiorem wszystkich funkcji holomorficznych w B, o postaci (11), gdzie $a(x)$ oznacza jakąś funkcję rzeczywistą i nierosnącą w przedziale $\langle 2, +\infty)$, spełniających warunek (12). Otóż w rozdziale III pokazujemy, że funkcje tejże klasy są gwiaździste i spełniają nierówności (13). Promień wypukłości r_0 dla całej klasy S_i dany jest formułą (14), podczas gdy (15) przedstawia odpowiednią funkcję ekstremalną. Jeżeli $f(z) \in S_i$, to obraz $f(B)$ pokrywa koło $|w| \leqslant (b-1)/(p+b-1)$ z rozcięciem wzdłuż odcinka $\langle -(b-1)/(p+b-1), 0\rangle$, a obraz koła $|z| \leqslant r_0$ z rozcięciem na odcinku $\langle -r_0, 0\rangle$ pokrywa koło $|w| \leqslant r_0^b(1-r^{2(b-1)})$ rozcięte wzdłuż odcinka $\langle -r_0^b(1-r_0^{2(b-1)}, 0\rangle$.

Jeżeli $f(z) \in S_i$, a r_m jest pierwiastkiem równania (17), to funkcja $\eta_{m,p}$ dana wzorem (18) spełnia w obszarze B nierówność (19). W klasie S_i stosują się oszacowania (20) modułów funkcji i jej pochodnej.

Résumé

Nous nous occupons ici de quelques classes de fonctions analytiques constituant des généralisations de celles qui ont été introduites dans les travaux de A. Schild [3] et de Z. Lewandowski [2].

Dans le I^er chapitre, nous envisageons la classe Sh_p de toutes les fonctions de la forme (1), holomorphes dans le cercle fermé $\bar{C} = \{z: |z| \leqslant 1\}$ et telles que $a_{p+n-1} \geqslant 0$ et (2). Nous désignons par d_0 le rayon maximum d'un cercle recouvert par l'image $f(\bar{C}_{r_0})$ du cercle $\bar{C}_{r_0} = \{z: |z| \leqslant r_0\}$, r_0 étant le rayon de convexité de la fonction $f(z)$, et par D_0 — le rayon maximum d'un cercle recouvert par $f(\bar{C})$. Nous démontrons que l'égalité (3) a lieu dans Sh_p et que le minimum est atteint pour une et une seule fonction (4).

Dans le II^e chapitre, il est question de la classe Sh_p^* formée des fonctions (8) holomorphes dans $\bar{C}^* = \{z: |z| \geqslant 1\}$ et satisfaisant à la condition (9); elles sont p-valentes et étoilées dans $\bar{C}^*$ [4]. Si $d_0 > 0$ désigne

le nombre maximum tel que le domaine $\{z:d_0 \leqslant |z| < +\infty\}$ soit recouvert par l'image $f(\overline{C}^*_{r_0})$ du domaine $\overline{C}^*_{r_0} = \{z:|z| \geqslant r_0\}$, r_0 étant le rayon de convexité de la fonction $f(z)$, et si D_0 désigne le nombre maximum tel que $\{z:D_0 \leqslant |z| < +\infty\} \subset f(\overline{C}^*)$, alors le rapport d_0/D_0 peut admettre dans Sh^*_p toute valeur réelle positive.

Soit B le cercle $|z| \leqslant 1$ avec une coupure le long du segment $\langle -1, 0\rangle$, et S_i la classe de toutes les fonctions de la forme (11), où $a(x)$ désigne une fonction réelle non décroissante sur l'intervalle $\langle 2, +\infty)$, holomorphes dans le domaine B et assujetties à la condition (12). Or, nous montrons, dans le III^e chapitre, que les fonctions de la classe S_i sont toujours étoilées et remplissent les inégalités (13) dans le domaine B. Le rayon de convexité r_0 pour toute la classe S_i est donné par la formule (14), tandis que (15) représente la fonction extrémale correspondante. Si $f(z) \in S_i$, l'image $f(B)$ du domaine B recouvre le cercle $|w| \leqslant (b-1)/(p+b-1)$ muni d'une coupure le long du segment $\langle -(b-1)/(p+b-1), 0\rangle$ et l'image du cercle $|z| \leqslant r_0$ avec une coupure le long du segment $\langle -r_0, 0\rangle$, recouvre le cercle $|w| \leqslant r_0^b(1-r_0^{2(b-1)})$ coupé le long du segment $\langle -r_0^b(1-r_0^{2(b-1)}), 0\rangle$.

Si $f(z) \in S_i$ et si r_m est la racine de l'équation (17), la fonction $\eta_{m,p}$ donnée par (18) satisfait, dans B, à l'inégalité (19). Dans la classe S_i ont lieu les limitations (20) pour les modules de la fonction et de sa dérivée.