

Z Katedry Zespołowej Matematyki Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr Adam Bielecki

JAN KISYŃSKI

**Solutions généralisées du problème de Cauchy-Darboux pour
l'équation $\partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y)$**

Rozwiązania uogólnione zadania Cauchy'ego-Darboux dla równania
 $\partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y)$

Обобщение решения задачи Коши-Дарбу относительно уравнения
 $\partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y)$

Nous étudions dans ce travail les solutions à dérivées sommables, introduites par R. Conti [3], [4] pour les problèmes de Cauchy et de Darboux relatifs à l'équation

$$(1) \quad \partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y).$$

Pour ces solutions nous donnons ici une définition différente de celle de Conti, ce qui permettra de mieux préciser le sens dans lequel sont vérifiées des conditions aux limites. La définition et les propriétés fondamentales des solutions à dérivées sommables sont exposées dans les paragraphes 1-4. Dans les §§ 5-10 nous démontrons l'existence des solutions, leur unicité et prouvons qu'elles dépendent d'une manière continue du second membre de l'équation et des conditions aux limites. Les raisonnements suivent le schéma exposé dans l'introduction du travail [7].

§ 1. Les ensembles Δ , Δ_{xy} et la courbe C

Dans ce travail $g(x)$ et $h(y)$ désigneront toujours des fonctions fixées continues à valeurs réelles, définies sur les intervalles $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $a > 0$, $b > 0$. Nous admettrons qu'il existe un $a' \in \langle 0, a \rangle$ et un $b' \in \langle 0, b \rangle$ tels que la fonction $g(x)$ décroisse de b' à zéro dans $\langle 0, a' \rangle$, $h(g(x)) = x$ pour $x \in \langle 0, a' \rangle$, $g(x) = 0$ pour $x \in \langle a', a \rangle$ et $h(y) = 0$ pour

$y \in \langle b', b \rangle$. Nous désignons par Δ l'ensemble $\{(x, y): 0 \leq x \leq a, g(x) \leq y \leq b\}$. Pour $(x, y) \in \Delta$ on note Δ_{xy} l'ensemble $\{(u, v): (u, v) \in \Delta, u \leq x, v \leq y\}$. Enfin, C désigne la courbe $\{(x, y): y = g(x), x \in \langle 0, a \rangle$ ou bien $x = h(y), y \in \langle 0, b \rangle\}$.

§ 2. Les fonctions de la classe $L_p^*(\Delta)$

Dans ce qui suit E désignera toujours un espace de Banach fixé. Dans les §§ 2-6 et 8 ce sera un espace de Banach quelconque. Dans le § 9 E sera un espace séparable, dans le § 10 — un espace à n dimensions. Par $L_p(0, a)$, $L_p(0, b)$ et $L_p(\Delta)$ nous désignerons les classes de fonctions à valeurs dans E , de puissance p ième sommable au sens de Bochner respectivement sur les intervalles $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ et sur l'ensemble Δ .

Définition. Une fonction $z(x, y)$ à valeurs dans l'espace E , définie sur l'ensemble Δ , sera dite fonction de classe $L_p^*(\Delta)$, $p \geq 1$, si elle est continue au sens de la norme sur l'ensemble Δ et s'il existe des fonctions $\alpha \in L_p(0, a)$, $\beta \in L_p(0, b)$ et $s \in L_p(\Delta)$ telles que

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \iint_{\Delta_{a-\varepsilon, b-\varepsilon}} \|\varepsilon^{-2} [z(x+\varepsilon, y+\varepsilon) + z(x, y) - z(x+\varepsilon, y) - z(x, y+\varepsilon)] - \\ & \qquad \qquad \qquad - s(x, y)\| dx dy = 0, \\ (2) \quad & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^{a-\varepsilon} \|\varepsilon^{-1} [z(x+\varepsilon, b) - z(x, b)] - \alpha(x)\| dx = 0, \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^{b-\varepsilon} \|\varepsilon^{-1} [z(a, y+\varepsilon) - z(a, y)] - \beta(y)\| dy = 0. \end{aligned}$$

Théorème 1. Pour que la fonction $z(x, y)$ soit de classe $L_p^*(\Delta)$, $p \geq 1$, il faut et il suffit qu'il existe des fonctions $\sigma \in L_p(0, a)$, $\tau \in L_p(0, b)$ et $s \in L_p(\Delta)$ telles que pour tous les $(x, y) \in \Delta$, $(x^0, y^0) \in C$ on ait

$$(3) \quad z(x, y) = z(x^0, y^0) + \int_{x^0}^x \sigma(u) du + \int_{y^0}^y \tau(v) dv + \iint_{\Delta_{xy}} s(u, v) du dv.$$

Les fonctions σ , τ et s sont définies univoquement et satisfont aux conditions

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow 0+} \iint_{\Delta_{a-\varepsilon, b-\delta}} \|\varepsilon^{-1} [z(x+\varepsilon, y+\delta) + z(x, y) - z(x+\varepsilon, y) - \\ & \qquad \qquad \qquad - z(x, y+\delta)] - s(x, y)\|^p dx dy = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \iint_{\Delta_{a-\varepsilon, b}} \|\varepsilon^{-1}[z(x+\varepsilon, y) - z(x, y)] - \sigma(x) - \int_{\sigma(x)}^y s(x, v) dv\|^p dx dy = 0, \\
 (4) \quad & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \iint_{\Delta_{a, b-\varepsilon}} \|\varepsilon^{-1}[z(x, y+\varepsilon) - z(x, y)] - \tau(y) - \int_{h(y)}^x s(u, y) du\|^p dx dy = 0, \\
 & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{g(x)}^{b-\varepsilon} \|\varepsilon^{-1}[z(x, y+\varepsilon) - z(x, y)] - \tau(y) - \int_{h(y)}^x s(u, y) du\|^p dy = 0 \\
 & \text{pour tout } x \in \langle 0, a \rangle, \text{ tel que } g(x) < b, \\
 & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{h(y)}^{a-\varepsilon} \|\varepsilon^{-1}[z(x+\varepsilon, y) - z(x, y)] - \sigma(x) - \int_{\sigma(x)}^y s(x, v) dv\|^p dx = 0 \\
 & \text{pour tout } y \in \langle 0, b \rangle, \text{ tel que } h(y) < a \text{ et}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^{a-\varepsilon} \|\varepsilon^{-1}[z(x+\varepsilon, g(x)) - z(x, g(x))] - \sigma(x)\|^p dx = 0, \\
 & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^{a-\varepsilon} \|\varepsilon^{-1}[z(h(y), y+\varepsilon) - z(h(y), y)] - \tau(y)\|^p dy = 0.
 \end{aligned}$$

Pour établir le théorème 1 nous prouverons:

- (a) que toute fonction $z \in L_p^*(\Delta)$ est de la forme (3),
- (b) que toute fonction z de la forme (3) satisfait aux conditions (4),
- (c) que toute fonction z de la forme (3) satisfait aux conditions (5).

Démonstration de (a). Nous prouverons d'abord que

$$(*) \quad \int_{x^0}^y a(u) du = z(x, b) - z(x^0, b) \quad \text{pour } x, x^0 \in \langle 0, a \rangle.$$

Posons $P_h(x) = h^{-1} \int_x^{x+h} z(u, b) du$, $h \in (0, a)$, $x \in \langle 0, a-h \rangle$. Comme les fonctions P_h sont de classe $C^{(1)}$, on a $P_h(x) - P_h(x^0) = \int_{x^0}^x P'_h(u) du = h^{-1} \int_{x^0}^x [z(u+h, b) - z(u, b)] du$ pour $0 \leq x^0 < x < a$, $h \in (0, a-x)$. La fonction z étant continue, on a $\lim_{h \rightarrow 0+} (P_h(x) - P_h(x^0)) = z(x, b) - z(x^0, b)$, et, avec (2), $\lim_{h \rightarrow 0+} h^{-1} \int_{x^0}^x [z(u+h, b) - z(u, b)] du = \int_{x^0}^x a(u) du$, donc l'égalité (*) est vraie pour $0 \leq x^0 < x < a$. L'égalité (*) pour $0 \leq x^0 \leq x \leq a$ en résulte par continuité.

Des raisonnements semblables mènent aux égalités

$$\int_{y^0}^y \beta(v) dv = z(a, y) - z(a, y^0) \quad \text{pour } y, y^0 \in \langle 0, b \rangle,$$

$$\int_x^a \int_y^b s(u, v) dv du = z(a, b) + z(x, y) - z(x, b) - z(a, y) \quad \text{pour } (x, y) \in \Delta.$$

Donc, pour tout (x, y) , $(x^0, y^0) \in \Delta$ on a

$$\begin{aligned} z(x, y) = z(x^0, y^0) + \int_{x^0}^x \alpha(u) du + \int_{y^0}^y \beta(v) dv + \int_x^a \int_y^b s(u, v) dv du - \\ - \int_{x^0}^a \int_{y^0}^b s(u, v) dv du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et, pour démontrer (a), il suffit de poser } \sigma(x) = \alpha(x) - \int_{g(x)}^b s(x, v) dv, \tau(y) \\ = \beta(y) - \int_{h(y)}^a s(u, y) du. \end{aligned}$$

Démonstration de (b). La première des égalités (4) résulte de ce que l'on a, d'après (3), $z(x+\varepsilon, y+\delta) + z(x, y) - z(x+\varepsilon, y) - z(x, y+\delta) = \int_{x+\varepsilon}^x \int_{y+\delta}^y s(u, v) dv du$ et, comme $s \in L_p(\Delta)$, $\lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow 0+} \iint_{\Delta_{a-\varepsilon, b-\delta}} \|s(x, y) - (\varepsilon\delta)^{-1} \int_x^{x+\varepsilon} \int_y^{y+\delta} s(u, v) dv du\|^p dx dy = 0$. Les autres égalités (4) se démontrent de façon analogue.

Avant de prouver (c) nous établirons le lemme suivant.

Lemme 1. Pour toute fonction réelle $M(x, y)$, sommable sur Δ , on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \varepsilon^{-1} \int_0^{a-\varepsilon} \left(\int_{\Delta_{x+\varepsilon, g(x)}} M(u, v) du dv \right) dx = 0.$$

Démonstration du lemme 1. Désignons par $\omega(\varepsilon)$ le module de continuité de la fonction $g(x)$ sur l'intervalle $\langle 0, a \rangle$ et posons $M(x, y) = 0$ en dehors de Δ . Pour établir le lemme 1 il suffit de prouver que

$$(*) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^0 (\varepsilon^{-1} \int_x^{x+\varepsilon} \lambda_\varepsilon(u) du) dx = 0,$$

où

$$\lambda_\varepsilon(u) = \begin{cases} \int_{g(u)}^{g(u)+\omega(\varepsilon)} |M(u, v)| dv & \text{pour } u \in \langle 0, a \rangle, \\ 0 & \text{pour } u > a. \end{cases}$$

Comme l'intégrale $\iint |M| du dv$ est absolument continue, on a

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^a \lambda_\varepsilon(u) du = 0$ d'où (*) résulte moyennant l'inégalité

$$\int_0^a \left(\varepsilon^{-1} \int_x^{x+\varepsilon} \lambda_\varepsilon(u) du \right) dx = \varepsilon^{-1} \int_0^\varepsilon \left(\int_u^{a+u} \lambda_\varepsilon(x) dx \right) du = \varepsilon^{-1} \int_0^\varepsilon \left(\int_0^a \lambda_\varepsilon(x) dx \right) du \leq \int_0^a \lambda_\varepsilon(x) dx.$$

Démonstration de (c). Dans cette démonstration $\iint$ désigne toujours une intégrale étendue à l'ensemble $\Delta_{x+\varepsilon, g(x)}$. Comme on a, en vertu de (3),

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^{a-\varepsilon} \left\| \varepsilon^{-1} [z(x+\varepsilon, g(x)) - z(x, g(x))] - \sigma(x) \right\|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \left(\int_0^{a-\varepsilon} \left\| \varepsilon^{-1} \int_x^{x+\varepsilon} \sigma(u) du - \sigma(x) \right\|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^{a-\varepsilon} \left\| \varepsilon^{-1} \iint s du dv \right\|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

il suffit, pour établir la première des égalités (5), de prouver que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \varepsilon^{-p} \int_0^{a-\varepsilon} \left\| \iint s du dv \right\|^p dx = 0.$$

Pour $p = 1$ cette égalité est une conséquence immédiate du lemme 1,

Si $p > 1$, on a, en vertu de l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-p} \int_0^{a-\varepsilon} \left\| \iint s du dv \right\|^p dx & \leq \varepsilon^{-p} \int_0^{a-\varepsilon} \left(\iint du dv \right)^{p-1} \left(\iint \|s\|^p du dv \right) dx \\ & \leq a^{p-1} \varepsilon^{-1} \int_0^{a-\varepsilon} \left(\iint \|s\|^p du dv \right) dx. \end{aligned}$$

La première des égalités (5) est ainsi établie. La démonstration de la seconde est analogue.

§ 3. Les dérivées $\partial z / \partial x$, $\partial z / \partial y$, et $\partial^2 z / \partial x \partial y$ de la fonction $z \in L_p^*(\Delta)$

Définition. Nous appellerons dérivées $\partial z / \partial x$, $\partial z / \partial y$ et $\partial^2 z / \partial x \partial y$ de la fonction $z \in L_p^*(\Delta)$, $p \geq 1$, les fonctions appartenant à $L_p(\Delta)$ et satisfaisant aux conditions

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow 0+} \iint_{\Delta_{a-\varepsilon, b-\delta}} & \|(\varepsilon \delta)^{-1} [z(x+\varepsilon, y+\delta) + z(x, y) - z(x+\varepsilon, y) - z(x, y+\delta)] - \\ & - \partial^2 z(x, y) / \partial x \partial y\|^p dx dy = 0, \end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \iint_{\Delta_{a-\varepsilon, b}} \left\| \varepsilon^{-1} [z(x+\varepsilon, y) - z(x, y)] - \partial z(x, y) / \partial x \right\|^p dx dy = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \iint_{\Delta_{a, b-\varepsilon}} \left\| \varepsilon^{-1} [z(x, y+\varepsilon) - z(x, y)] - \partial z(x, y) / \partial y \right\|^p dx dy = 0.$$

Du théorème 1 résulte que toute fonction $z \in L_p^*(\Delta)$ admet des dérivées $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ et $\partial^2 z/\partial x \partial y$ dans le sens précisé plus haut, définies d'une manière univoque⁽¹⁾, et que l'on a le théorème suivant.

Théorème 2. *Pour toute fonction $z \in L_p^*(\Delta)$, $p \geq 1$, on a*

$$z(x, y) = z(x^0, y^0) + \int_{x^0}^x \sigma(u) du + \int_{y^0}^y \tau(v) dv + \iint_{\Delta_{xy}} [\partial^2 z(u, v)/\partial u \partial v] du dv$$

pour tout $(x, y) \in \Delta$, $(x^0, y^0) \in C$, et

$$\partial z(x, y)/\partial x = \sigma(x) + \int_{g(x)}^h [\partial^2 z(x, v)/\partial x \partial v] dv,$$

$$\partial z(x, y)/\partial y = \tau(y) + \int_{h(y)}^x [\partial^2 z(u, y)/\partial u \partial y] du$$

presque partout dans Δ , où $\sigma \in L_p(0, a)$ et $\tau \in L_p(0, b)$ sont définies par les conditions (5).

§ 4. Problèmes de Cauchy et de Darboux pour l'équation (1) dans la classe des fonctions $L_p^*(\Delta)$

Hypothèses (H). On suppose donnée une fonction $f(x, y, z, p, q)$ à valeurs dans E , définie pour $(x, y) \in \Delta$ et $z, p, q \in E$, pour tout $(x, y) \in \Delta$ fixé continue par rapport à z, p, q au sens de la norme dans E et mesurable au sens de Bochner sur l'ensemble Δ pour $z, p, q \in E$ fixés quelconques, telle que $f(x, y, 0, 0, 0) \in L_p(\Delta)$, $p \geq 1$. On suppose encore données deux fonctions $\sigma \in L_p(0, a)$ et $\tau \in L_p(0, b)$, et enfin un point $(x^0, y^0) \in C$ et un élément $z^0 \in E$.

Problème (C—D). Déterminer une fonction $z \in L_p^*(\Delta)$, appelée solution du problème (C—D), satisfaisant à l'équation (1) presque partout dans Δ et vérifiant en même temps les conditions

$$(5) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{a-\varepsilon}^a \|\varepsilon^{-1}[z(x+\varepsilon, g(x)) - z(x, g(x))] - \sigma(x)\|^p dx = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{a-\varepsilon}^a \|\varepsilon^{-1}[z(h(y), y+\varepsilon) - z(h(y), y)] - \tau(y)\|^p dy = 0$$

et la condition

$$(6) \quad z(x^0, y^0) = z^0.$$

⁽¹⁾ Comme éléments de l'espace $L_p(\Delta)$.

Du théorème sur l'unicité des solutions de classe $L_p^*(\Delta)$, dont la démonstration sera donnée au § 8, et des théorèmes connus sur l'existence des solutions classiques de l'équation (1) résulte que si les fonctions σ , τ et f sont continues et si f vérifie la condition de Osgood par rapport à z , p et q , la solution du problème (C-D) est une solution classique de l'équation (1) satisfaisant à la condition (6) et aux conditions

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, g(x)) = \sigma(x) \quad \text{pour} \quad x \in \langle 0, a \rangle \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial x}(h(y), y) = \tau(y) \\ \text{pour} \quad y \in \langle 0, b \rangle.$$

Pour $a' = a$, $b' = b$ on obtient alors une solution classique du problème de Cauchy, pour $a = b = 0$ une solution classique du problème de Darboux.

§ 5. Le problème (C-D) considéré comme problème relatif au point fixe d'une opération définie sur $L_p(\Delta)$

Admettons les hypothèses (H), Soit F une opération qui fait correspondre à la fonction $s \in L_p(\Delta)$ la fonction F_s mesurable au sens de Bochner, définie par la formule

$$F's(x, y) = f(x, y, z^0 + \int_{x^0}^x \sigma(u) du + \int_{y^0}^y \tau(v) dv + \iint_{\Delta_{xy}} s(u, v) dudv, \sigma(x) + \\ + \int_{\sigma(x)}^y s(x, v) dv, \tau(y) + \int_{h(y)}^x s(u, y) du)$$

presque partout dans Δ . Du théorème 2 résulte le suivant:

Théorème 3. *Pour que la fonction z soit une solution du problème (C-D), il faut et il suffit que l'on ait*

$$z(x, y) = z^0 + \int_{x^0}^x \sigma(u) du + \int_{y^0}^y \tau(v) dv + \iint_{\Delta_{xy}} s(u, v) dudv \quad \text{pour} \quad (x, y) \in \Delta,$$

où $s \in L_p(\Delta)$ est le point fixe de l'opération F .

§ 6. Application du théorème du point fixe de Banach-Cacciopoli-Tikhonov au problème (C-D)

Théorème 4. *Admettons les hypothèses (H) et supposons de plus que la fonction $f(x, y, z, p, q)$ satisfasse à la condition de Lipschitz*

$$\|f(x, y, z, p, q) - f(x, y, \tilde{z}, \tilde{p}, \tilde{q})\| \leq L \cdot (\|z - \tilde{z}\| + \|p - \tilde{p}\| + \|q - \tilde{q}\|),$$

$$L = \text{const},$$

pour tous les $(x, y) \in \Delta$ et $z, p, q, \tilde{z}, \tilde{p}, \tilde{q} \in E$. Dans ces conditions, le problème (C-D) admet exactement une solution. Si les fonctions $\sigma(x)$, $\tau(y)$ et $f(x, y, 0, 0, 0)$ sont essentiellement bornées, il en est de même des dérivées $\partial z / \partial x$, $\partial z / \partial y$ et $\partial^2 z / \partial x \partial y$ de cette solution.

Démonstration. En vertu des théorèmes 2 et 3 il suffit de prouver:

- (a) que l'opération F admet exactement un point fixe dans l'espace $L_p(\Delta)$,
- (b) que si $\sigma(x)$, $\tau(y)$ et $f(x, y, 0, 0, 0)$ sont essentiellement bornées, ce point fixe l'est également.

Ad (a). Dans l'espace $L_p(\Delta)$ introduisons la norme ⁽²⁾

$$\|s\|_\lambda = \max_{(x,y) \in \Delta} e^{-\lambda \cdot (x+y)} \left(\int \int_{\Delta_{xy}} \|s(u, v)\|^p du dv \right)^{\frac{1}{p}},$$

où λ est une constante positive assez grande pour que l'on ait

$$K_\lambda = L \cdot \left(a^{1-\frac{1}{p}} + b^{1-\frac{1}{p}} + (ab)^{1-\frac{1}{p}} (p\lambda)^{-\frac{1}{p}} \right) (p\lambda)^{-\frac{1}{p}} < 1.$$

Soit $s \in L_p(\Delta)$. Supposons que l'on ait $s(x, y) = 0$ en dehors de l'ensemble A . Alors

$$\begin{aligned} \int \int_{\Delta_{xy}} \left\| \int_{h(v)}^u s(t, v) dt \right\|^p du dv &\leq \int_0^x \left[\int_0^y \left\| \int_0^u s(t, v) dt \right\|^p dv \right] du \leq \\ &\leq a^{p-1} \int_0^x \left[\int_0^y \left\| \int_0^u \|s(t, v)\|^p dt \right\| dv \right] du \leq \\ &\leq a^{p-1} \int_0^x (\|s\|_\lambda)^p e^{p\lambda \cdot (u+v)} du \leq a^{p-1} (p\lambda)^{-1} e^{p\lambda \cdot (x+y)} (\|s\|_\lambda)^p. \end{aligned}$$

Donc

$$\left\| \int_{h(y)}^x s(u, y) du \right\|_\lambda \leq a^{1-\frac{1}{p}} (p\lambda)^{-\frac{1}{p}} \|s\|_\lambda.$$

De même

$$\left\| \int_{g(x)}^y s(x, v) dv \right\|_\lambda \leq b^{1-\frac{1}{p}} (p\lambda)^{-\frac{1}{p}} \|s\|_\lambda,$$

⁽²⁾ En introduisant une norme de ce genre nous avons suivi l'exemple de M. A. Bielecki [1].

par conséquent

$$\begin{aligned} \left\| \left\{ \int_{\Delta_{xy}} s(u, v) du dv \right\} \right\|_{\lambda} &= \left\| \left\{ \int_{g(x)}^y \left[\int_{h(v)}^x s(u, v) du \right] dv \right\} \right\|_{\lambda} \\ &\leq b^{1-\frac{1}{p}} (p\lambda)^{-\frac{1}{p}} \left\| \left\{ \int_{h(y)}^x s(u, y) du \right\} \right\|_{\lambda} \leq (ab)^{1-\frac{1}{p}} (p\lambda)^{-\frac{2}{p}} \|s\|_{\lambda}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \|Fs(x, y)\|_E &\leq \|f(x, y, 0, 0, 0)\|_E + L \cdot \left(\|z^0 + \int_{y^0}^x \sigma(u) du + \int_{y^0}^y \tau(v) dv + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Delta_{xy}} s(u, v) du dv + \|\sigma(x) + \int_{g(x)}^y s(x, v) dv + \|\tau(y) + \int_{h(y)}^x s(u, y) du\| \right), \end{aligned}$$

donc la transformation F transforme l'espace $L_p(\Delta)$ en lui-même. De plus, on a

$$\|Fs_1 - Fs_2\|_{\lambda} \leq K_{\lambda} \cdot \|s_1 - s_2\|_{\lambda} \quad \text{pour tout } s_1, s_2 \in L_p(\Delta),$$

d'où il résulte, en tenant compte de l'inégalité $K_{\lambda} < 1$ et en vertu du théorème du point fixe de Banach-Cacciopoli-Tikhonov, que l'opération F admet dans l'espace $L_p(\Delta)$ exactement un point fixe.

Ad (b). On établit la conclusion en faisant un raisonnement analogue au précédent pour l'espace des fonctions essentiellement bornées sur l'ensemble Δ , muni de la norme

$$\|s\|_{\lambda} = \text{vrai max}_{(x,y) \in \Delta} e^{-\lambda \cdot (x+y)} \|s(x, y)\|.$$

§ 7. Théorème auxiliaire sur une inégalité intégrale

Théorème 5. Soit $\kappa(\delta)$ une fonction continue et non décroissante pour $\delta \in \langle 0, +\infty \rangle$, telle que $\kappa(0) = 0$, $0 < \kappa(\delta) \leq L \cdot (1 + \delta)$, $L = \text{const}$, pour $\delta > 0$, et

$$(7) \quad \int_0^{\infty} \frac{du}{\kappa(u)} = +\infty.$$

Si la fonction $r(x, y)$, sommable dans le rectangle $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$, satisfait presque partout dans R à l'inégalité

$$(8) \quad 0 \leq r(x, y) \leq \kappa \left(\int_0^x \int_0^y r(u, v) dv du + \int_0^y r(x, v) dv + \int_0^x r(u, y) du \right)$$

alors $r(x, y) = 0$ presque partout dans R .

Pour les fonctions $r(x, y)$ continues le théorème 5, qui est alors une des conséquences d'un théorème de Walter [10], a été établi dans [5] par Foias, Gussi et Poenaru et plus tard, dans [6], par l'auteur du présent travail.

La démonstration du théorème 5, que nous partagerons en plusieurs lemmes, comprend les étapes suivantes:

- (a) la fonction $r(x, y)$, qui satisfait à (8), est essentiellement bornée, ce qui permet de définir la fonction $R(t) = \text{vrai max}_{(x,y) \in R, x+y < t} r(x, y)$,
 (b) $r(x, y) \leq R(x+y)$ presque partout dans R ,
 (c) $0 \leq R(t) \leq \kappa((a+2) \int_0^t R(\tau) d\tau)$ pour $t \in (0, a+b)$, d'où résulte que

$R(t) \equiv 0$ et, avec (b), la démonstration sera ainsi achevée.

Les démonstrations analogues dans [5] et [6] sont beaucoup plus courtes, car les étapes correspondantes (a) et (b) ne présentent aucune difficulté lorsque les fonctions $r(x, y)$ sont continues.

Lemme 2. Si la fonction $r_h(x, y)$, continue dans le rectangle $R_h = \{(x, y) : -h \leq x \leq a, -h \leq y \leq b\}$, satisfait à l'inégalité

$$(9) \quad r_y(x, y) \leq L \cdot \left(1 + \int_{-h}^x \int_{-h}^y r_h(u, v) dv du + \int_{-h}^y r_h(x, v) dv + \int_{-h}^x r_h(u, y) du \right),$$

où $L = \text{const} > 0$, pour $(x, y) \in R_h$, alors

$$(10) \quad r_h(x, y) < \lambda e^{\lambda \cdot (x+y+2h)}, \quad \lambda = 3L+1, \quad \text{pour } (x, y) \in R_h.$$

Démonstration. L'inégalité (10) est vérifiée pour $(x, y) = (-h, -h)$. Si elle ne l'était pas dans tout le rectangle R , il devrait exister un $(\bar{x}, \bar{y}) \in R_h$ tel que $r_y(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda e^{\lambda \cdot (\bar{x}+\bar{y}+2h)}$ et $r(x, y) \leq \lambda e^{\lambda \cdot (x+y+2h)}$ pour $x \in \langle -h, \bar{x} \rangle$, $y \in \langle -h, \bar{y} \rangle$. Mais alors, on aurait, à cause de (9),

$$\begin{aligned} r_h(\bar{x}, \bar{y}) &\leq L \cdot \left(1 + \int_{-h}^{\bar{x}} \int_{-h}^{\bar{y}} \lambda e^{\lambda \cdot (u+v+2h)} dv du + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-h}^{\bar{y}} \lambda e^{\lambda \cdot (\bar{x}+v+2h)} dv + \int_{-h}^{\bar{x}} \lambda e^{\lambda \cdot (u+\bar{y}+2h)} du \right) < \lambda e^{\lambda \cdot (\bar{x}+\bar{y}+2h)}. \end{aligned}$$

Lemme 3. Si la fonction $\varphi(x)$ est sommable sur $\langle 0, c \rangle$, $c > 0$, et nulle en dehors de $\langle 0, c \rangle$, on a

$$\int_x^{x+h} \left(\int_0^u \varphi(t) dt \right) du = \int_{-h}^x \left(\int_u^{u+h} \varphi(t) dt \right) du$$

pour tout x et tout $h > 0$.

Lemme 4. *Sous les hypothèses du théorème 5, la fonction $r(x, y)$ est essentiellement bornée dans le rectangle R .*

Démonstration. 1° Comme $\kappa(\delta) \leq L \cdot (1 + \delta)$, on a

$$(11) \quad 0 \leq r(x, y) \leq L \cdot \left(1 + \int_0^x \int_0^y r(u, v) dv du + \int_0^y r(x, v) dv + \int_0^x r(u, y) du \right)$$

presque partout dans R . Si l'on admet que $r(x, y) = 0$ en dehors de R , l'inégalité (11) sera vérifiée presque partout dans tout le plan xy .

2° Prenons un $h > 0$ et posons $r_h(x, y) = h^{-2} \int_x^{x+h} \int_y^{y+h} r(u, v) dv du$. En tenant compte du lemme 3 et en s'appuyant sur le théorème de Fubini on constate, d'après (11), que r_h satisfait dans R_h à l'inégalité (9). Donc, en vertu du lemme 2, on a $r_h(x, y) < \lambda e^{\lambda \cdot (x+y+2h)}$ pour $(x, y) \in R_h$.

3° Comme $\lim_{h \rightarrow 0+} r_h(x, y) = r(x, y)$ presque partout, on a aussi $r(x, y) \leq \lambda e^{\lambda \cdot (x+y)}$ presque partout dans R .

Lemme 5. *Sous les hypothèses du théorème 5 posons*

$$R(t) = \operatorname{vraimax}_{(x,y) \in R, x+y < t} r(x, y) \quad \text{pour} \quad t \in (0, a+b>$$

Alors $r(x, y) \leq R(x+y)$ presque partout dans R .

Démonstration. 1° Pour tout $t \in (0, a+b>$ et tout ensemble $V \subset R$ de mesure plane nulle, on a

$$(12) \quad R(t) \leq \sup_{(x,y) \in R-V, x+y < t} r(x, y)$$

et, pour tout $t \in (0, a+b>$, il existe un ensemble $U_t \subset R$, de mesure plane nulle, tel que

$$(13) \quad R(t) = \sup_{(x,y) \in R-U_t, x+y < t} r(x, y).$$

2° Des formules (12) et (13) il résulte que la fonction $R(t)$ est non décroissante.

3° Désignons par U la somme des ensembles U_t pour tout $t \in (0, a+b>$ rationnel. L'ensemble U est de mesure nulle. Nous allons prouver que

$$(14) \quad R(t) = \bar{R}(t) \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{(x,y) \in R-U, x+y < t} r(x, y) \quad \text{pour tout} \quad t \in (0, a+b>.$$

L'inégalité $R(t) \leq \bar{R}(t)$ étant manifeste d'après (12), il reste à prouver que $\bar{R}(t) \leq R(t)$, c'est-à-dire que $r(x, y) \leq R(t)$ pour tout $(x, y) \in R-U$, tel que $x+y < t$. Dans ce but, considérons un nombre rationnel τ satis-

faisant à l'inégalité $x + y < \tau < t$. Alors, comme $U_\tau \subset U$, on a $(x, y) \in R - U_\tau$ et $x + y < \tau$, donc, d'après (13), $r(x, y) \leq R(\tau)$. Mais $R(\tau) \leq R(t)$ puisque $\tau < t$, donc l'égalité (14) est démontrée.

4° Posons

$$\bar{R}(t) = \sup_{(x,y) \in R - U, x+y \leq t} r(x, y) \quad \text{pour } t \in (0, a+b).$$

Si $0 < t < t + \varepsilon \leq a + b$, on a, d'après (14), $R(t) \leq \bar{R}(t) \leq R(t + \varepsilon)$ et par conséquent

$$(15) \quad R(t_0) = \bar{R}(t_0) \text{ si } t_0 \in (0, a+b) \text{ est un point de continuité de } R(t).$$

5° Désignons par S l'ensemble de tous les points $(x, y) \in R$ tels que $t_0 = x + y$ est un point de discontinuité de $R(t)$. Comme $R(t)$ est une fonction non décroissante, l'ensemble de ses points de discontinuité est tout au plus dénombrable et, par conséquent, l'ensemble S est de mesure plane nulle. En vertu de (15), l'inégalité $r(x, y) \leq R(x + y)$ a lieu pour tous les points $(x, y) \in R - (U + S)$ et le lemme 5 est ainsi démontré.

Lemme 6. *Sous les hypothèses du théorème 5 on a*

$$(16) \quad 0 \leq R(t) \leq \kappa \left((a+2) \int_0^t R(\tau) d\tau \right) \text{ pour } t \in (0, a+b).$$

Démonstration. En vertu du lemme 5 on a

$$\begin{aligned} \int_0^y r(x, v) dv &\leq \int_0^y R(x+v) dv \leq \int_0^{x+y} R(\tau) d\tau, \\ \int_0^x r(u, y) du &\leq \int_0^x R(u+y) du \leq \int_0^{x+y} R(\tau) d\tau \end{aligned}$$

et

$$\int_0^x \int_0^y r(u, v) dv du \leq \int_0^x \int_0^y R(u+v) dv du \leq x \int_0^y R(x+v) dv \leq x \int_0^{x+y} R(\tau) d\tau$$

presque partout dans R . Donc, comme la fonction $\kappa(\delta)$ est non décroissante, on a, d'après (8),

$$0 \leq r(x, y) \leq \kappa \left((a+2) \int_0^t R(\tau) d\tau \right)$$

pour presque tout $(x, y) \in R$ tel que $x + y < t$, ce qui est équivalent à l'inégalité (16).

Achèvement de la démonstration du théorème 5

1° En vertu des lemmes 5 et 6 il suffit de prouver que la fonction continue $R^*(t) = \kappa((a+2) \int_0^t R(\tau) d\tau)$ est identiquement nulle dans l'intervalle $(0, a+b)$.

2° D'après (16) on a, comme la fonction $\kappa(\delta)$ est non décroissante,

$$(17) \quad 0 \leq R^*(t) \leq \kappa((a+2) \int_0^t R^*(\tau) d\tau) \text{ pour } t \in (0, a+b).$$

3° Les formules (7) et (17) entraînent $R^*(t) \equiv 0$. On peut le prouver en faisant le même calcul que dans le travail [6], p. 90, ou bien en appliquant à la fonction $\varphi(t) = \int_0^t R^*(\tau) d\tau$ le théorème des inégalités différentielles.

§ 8. Application de la méthode de T. Ważewski pour prouver la convergence des approximations successives

Théorème 6. *Admettons l'hypothèse (H) et supposons de plus que la fonction $f(x, y, z, p, q)$ satisfait à la condition de Osgood*

$$(18) \quad \|f(x, y, z, p, q) - f(x, y, \tilde{z}, \tilde{p}, \tilde{q})\| \leq \kappa(\|z - \tilde{z}\| + \|p - \tilde{p}\| + \|q - \tilde{q}\|)$$

pour tout $(x, y) \in \Delta$ et $z, p, q, \tilde{z}, \tilde{p}, \tilde{q} \in E$, où $\kappa(\delta)$ est une fonction continue et non décroissante pour $\delta \in (0, +\infty)$, telle que $\kappa(0) = 0$, $\kappa(\delta) > 0$ pour $\delta > 0$ et que

$$\int_0^+ \frac{du}{\kappa(u)} = +\infty.$$

Dans ces conditions le problème (C-D) admet exactement une solution. Si les fonctions $\sigma(x)$, $\tau(y)$ et $f(x, y, 0, 0, 0)$ sont essentiellement bornées, il en est de même des dérivées $\partial z / \partial x$, $\partial z / \partial y$ et $\partial^2 z / \partial x \partial y$ de cette solution. De plus, pour toute fonction $z_0 \in L_p^*(\Delta)$, cette solution s'obtient comme limite de la suite des approximations successives

$$\begin{aligned} z_n(x, y) = & z_0 + \int_{x^0}^x \sigma(u) du + \int_{y^0}^y \tau(v) dv + \\ & + \int_{\Delta_{xy}} f(u, v, z_{n-1}(u, v), \partial z_{n-1}(u, v) / \partial u, \partial z_{n-1}(u, v) / \partial v) du dv \end{aligned}$$

uniformément convergente sur l'ensemble Δ . Les suites des dérivées $\partial z_n / \partial x$,

$\partial z_n / \partial y$ et $\partial^2 z_n / \partial x \partial y$ convergent vers les dérivées respectives de la solution en moyenne d'ordre p et, en même temps, presque partout sur l'ensemble Δ .

Il résulte de l'hypothèse (18) que, pour

$$L = \kappa(1), \quad n = [1 + \|z - \tilde{z}\| + \|p - \tilde{p}\| + \|q - \tilde{q}\|]$$

on a

$$\begin{aligned} \|f(x, y, z, p, q) - f(x, y, \tilde{z}, \tilde{p}, \tilde{q})\| &\leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n \left\| f\left(x, y, \tilde{z} + \frac{k}{n}(\tilde{z} - z), p + \frac{k}{n}(\tilde{p} - p), q + \frac{k}{n}(\tilde{q} - q)\right) - \right. \\ &\quad \left. - f\left(x, y, z + \frac{k-1}{n}(\tilde{z} - z), p + \frac{k-1}{n}(\tilde{p} - p), q + \frac{k-1}{n}(\tilde{q} - q)\right) \right\| \leq \\ &\leq n\kappa\left(\frac{1}{n}(\|z - \tilde{z}\| + \|\tilde{p} - p\| + \|q - \tilde{q}\|)\right) \leq L \cdot (1 + \|\tilde{z} - z\| + \|\tilde{p} - p\| + \|q - \tilde{q}\|) \end{aligned}$$

pour $(x, y) \in \Delta$ et $z, p, q, \tilde{z}, \tilde{p}, \tilde{q} \in E$ quelconques. Par conséquent on a

$$(19) \quad \|f(x, y, z, p, q)\| \leq \|f(x, y, 0, 0, 0)\| + L \cdot (1 + \|z\| + \|p\| + \|q\|)$$

pour $(x, y) \in \Delta$ et $z, p, q \in E$ quelconques, et l'on peut admettre, sans nuire à la généralité, que

$$(20) \quad \kappa(\delta) \leq L \cdot (1 + \delta) \quad \text{pour} \quad \delta \in (0, +\infty).$$

Pour établir le théorème 6, nous appliquerons à la transformation F la méthode donnée sous forme abstraite par Wazewski [11]. Dans notre cas, l'espace de Banach intervenant dans [11] sera $L_p(\Delta)$ et l'espace semi-ordonné correspondant sera l'espace des fonctions réelles de puissance p ième sommable sur Δ . La preuve du théorème 6 que nous allons donner peut être lue indépendamment du travail [11].

Démonstration du théorème 6.

1° L'opération F transforme l'espace $L_p(\Delta)$ en lui-même. Cela résulte de l'inégalité (19).

2° L'opération F est continue dans l'espace $L_p(\Delta)$. Pour le démontrer, considérons une suite $s_n, n = 1, 2, \dots$, de fonctions appartenant à $L_p(\Delta)$, de puissance p ième convergente en moyenne sur l'ensemble Δ vers s_0 . De toute sous-suite s_{n_m} on peut extraire une sous-suite $s_{n_{m_k}}$ convergente vers la fonction s_0 presque partout sur l'ensemble Δ et telle que la fonction $S(x, y) = \sup_{k=1, 2, \dots} \|s_{n_{m_k}}(x, y)\|$ soit de puissance p ième sommable sur l'ensemble Δ . La fonction $f(x, y, z, p, q)$ étant continue par rapport à z ,

p et q , la suite $Fs_{n_{m_k}}$ converge presque partout sur l'ensemble Δ vers Fs_0 et il résulte de l'inégalité que la fonction $T(x, y) = \sup_{k=1,2,\dots} \|Fs_{n_{m_k}}(x, y)\|$ est de puissance p ième sommable sur l'ensemble Δ . En vertu du théorème de Lebesgue sur l'intégration terme à terme, la suite $Fs_{n_{m_k}}$ converge en moyenne d'ordre p sur l'ensemble Δ vers Fs_0 . Donc, toute sous-suite Fs_{n_m} de la suite Fs_n contient une sous-suite $Fs_{n_{m_k}}$ qui converge en moyenne d'ordre p sur l'ensemble vers Fs_0 et, par conséquent, la suite Fs_n converge en moyenne d'ordre p sur l'ensemble Δ vers Fs_0 .

3° On vérifie aisément, avec 1° et 2°, que pour prouver le théorème 6 il suffit de montrer que pour tout couple de fonctions $s_0, \bar{s}_0 \in L_p(\Delta)$ les suites de fonctions s_n et $\bar{s}_n$, $n = 0, 1, \dots$, définies par les formules $s_n = Fs_{n-1}$, $\bar{s}_n = F\bar{s}_{n-1}$ ont les propriétés suivantes:

- (a) il existe une fonction M non négative, de puissance p ième sommable sur Δ , telle que $\|s_n(x, y)\| \leq M(x, y)$ et $\|\bar{s}_n(x, y)\| \leq M(x, y)$ presque partout sur Δ pour $n = 0, 1, \dots$ et que, si les fonctions $\sigma(x)$, $\tau(y)$, $f(x, y, 0, 0, 0)$, $s_0(x, y)$ et $\bar{s}_0(x, y)$ sont essentiellement bornées, on peut admettre pour $M(x, y)$ une fonction essentiellement bornée et
- (b) les suites s_n et $\bar{s}_n$ convergent presque partout sur Δ vers la même limite.

4° Construction de la fonction $M(x, y)$ et démonstration de la propriété 3°a. Posons

$$N(x, y) = \|s_0(x, y)\| + \|\bar{s}_0(x, y)\| + \|f(x, y, 0, 0, 0)\| + \\ + L \cdot (1 + \|z\| + \|\sigma(x)\| + \|\tau(y)\| + \left\| \int_{x^0}^x \sigma(u) du \right\| + \left\| \int_{y^0}^y \tau(v) dv \right\|).$$

Par un raisonnement pareil à celui de la démonstration du théorème 4, on constate que l'équation

$$(21) \quad M(x, y) = N(x, y) + L \cdot \left(\iint_{\Delta_{xy}} M(u, v) du dv + \int_{\sigma(x)}^y M(x, v) dv + \right. \\ \left. + \int_{h(y)}^x M(u, y) du \right) \quad \text{presque partout sur } \Delta$$

admet une solution $M(x, y)$ de puissance p ième sommable sur Δ et non négative et que, si $\sigma(x)$, $\tau(y)$, $f(x, y, 0, 0, 0)$, $s_0(x, y)$ et $\bar{s}_0(x, y)$ sont essentiellement bornées, il en est de même de $M(x, y)$. En profitant de l'inégalité (19) nous prouvons par induction que $\|s_n(x, y)\| \leq M(x, y)$ et $\|\bar{s}_n(x, y)\| \leq M(x, y)$ presque partout sur Δ pour $n = 1, 2, \dots$

Nous établirons maintenant la propriété 3°b.

5° Pour $(x, y) \in \Delta$ et $n = 0, 1, \dots$ posons $r_n(x, y) = \sup_{i, j > n} \|s_i(x, y) - \tilde{s}_j(x, y)\|$. Les fonctions $r_n(x, y)$ sont mesurables sur D et vérifient l'inégalité $0 \leq r_n(x, y) \leq 2M(x, y)$ presque partout sur Δ , donc elles sont sommables sur Δ . Comme elles forment une suite non croissante, il existe presque partout sur Δ une limite $r(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x, y)$, qui est une fonction non négative et sommable sur Δ . Pour établir la propriété 3°b, et par cela même achever la démonstration du théorème 6, il suffit de prouver que $r(x, y) = 0$ presque partout sur Δ .

6° D'après (18) on a, puisque la fonction $\kappa(\delta)$ est monotone, pour tout $i, j \geq n$,

$$\begin{aligned} \|s_{i+1}(x, y) - \tilde{s}_{j+1}(x, y)\| &\leq \kappa \left(\iint_{\Delta_{xy}} \|s_i(u, v) - \tilde{s}_j(u, v)\| du dv + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\sigma(x)}^y \|s_i(x, v) - \tilde{s}_j(x, v)\| dv + \int_{h(y)}^x \|s_i(u, y) - \tilde{s}_j(u, y)\| du \right) \leq \\ &\leq \kappa \left(\iint_{\Delta_{xy}} r_n(u, v) du dv + \int_{\sigma(x)}^y r_n(x, v) dv + \int_{h(y)}^x r_n(u, y) du \right) \end{aligned}$$

presque partout sur Δ , d'où l'on déduit, pour $n = 0, 1, \dots$,

$$(22) \quad r_{n+1}(x, y) \leq \kappa \left(\iint_{\Delta_{xy}} r_n(u, v) du dv + \int_{\sigma(x)}^y r_n(x, v) dv + \int_{h(y)}^x r_n(u, y) du \right)$$

presque partout sur Δ .

7° La fonction $\kappa(\delta)$ étant continue, l'inégalité (22) entraîne, en vertu du théorème de Lebesgue sur l'intégration terme à terme, la suivante:

$r(x, y) \leq \kappa \left(\iint_{\Delta_{xy}} r(u, v) du dv + \int_{\sigma(x)}^y r(x, v) dv + \int_{h(y)}^x r(u, y) du \right)$ presque partout sur Δ . En admettant $r(x, y) = 0$ pour $(x, y) \in R - \Delta$ nous en tirons l'inégalité (8), d'où il s'ensuit que l'on a, en vertu du théorème 5, $r(x, y) = 0$ presque partout sur Δ , ce qui achève la démonstration du théorème 6.

§ 9. Les solutions du problème (C—D) dépendent continuellement du second membre de l'équation et des conditions aux limites

Théorème 7. Soit E un espace de Banach séparable. Supposons donné un nombre $p_0 > 1$. Soient z_n^0 , $n = 0, 1, \dots$, une suite d'éléments de l'espace E , $\sigma_n(x)$, $\tau_n(y)$ et $f_n(x, y, z, p, q)$, $n = 0, 1, \dots$, des suites de fonctions telles

que, pour tout $n = 0, 1, \dots$, les hypothèses (H) soient vérifiées lorsque $p = p_0$, $z^0 = z_n^0$, $\sigma = \sigma_n$, $\tau = \tau_n$, $f = f_n$. Supposons encore que pour tout $n = 0, 1, \dots$

$$(23) \quad \|f_n(x, y, z, p, q) - f_n(x, y, \tilde{z}, \tilde{p}, \tilde{q})\| \leq \kappa(\|z - \tilde{z}\| + \|p - \tilde{p}\| + \|q - \tilde{q}\|)$$

pour tout $(x, y) \in \Delta$ et $z, p, q, \tilde{z}, \tilde{p}, \tilde{q} \in E$, où la fonction κ , indépendante de n , a les mêmes propriétés que dans le cas du théorème 6. Pour tout $n = 0, 1, \dots$ fixé, désignons par $z_n(x, y)$ la solution, dont l'existence et l'unicité sont assurées par le théorème 6, du problème (C-D) pour $z^0 = z_n$, $\sigma = \sigma_n$, $\tau = \tau_n$ et $f = f_n$.

$$\text{Si } \|z_n^0 - z_0^0\| \rightarrow 0, \quad \int_0^a \|\sigma_n(x) - \sigma_0(x)\|^{p_0} dx \rightarrow 0, \quad \int_0^b \|\tau_n(y) - \tau_0(y)\|^{p_0} dy \rightarrow 0$$

et

$$(24) \quad \iint_{\Delta} \|f_n(x, y, z, p, q) - f_0(x, y, z, p, q)\|^{p_0} dx dy \rightarrow 0$$

pour $z, p, q \in E$ quelconques fixés, alors $\|z_n - z_0\|_{p_0}^* \rightarrow 0$, où

$$(25) \quad \|z\|_p^* = \max_{\Delta} \|z(x, y)\| + \left(\iint_{\Delta} \left[\left\| \frac{\partial z}{\partial x} \right\| + \left\| \frac{\partial z}{\partial y} \right\| + \left\| \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right\| \right]^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour établir le théorème 7, il suffit de prouver que toute suite croissante de nombres naturels $n_1, n_2, \dots$ contient une sous-suite $n_{m_1}, n_{m_2}, \dots$ telle que $\|z_{n_{m_k}} - z_0\|_{p_0}^* \rightarrow 0$. La démonstration du théorème 7 est ainsi ramenée à celle des deux lemmes suivants sous les hypothèses du théorème 7.

Lemme 7. *Toute suite croissante de nombres naturels $n_1, n_2, \dots$ contient une sous-suite $n_{m_1}, n_{m_2}, \dots$ telle que*

(i) *pour $z, p, q \in E$ quelconques fixés on ait*

$$f_{n_{m_k}}(x, y, z, p, q) \rightarrow f_0(x, y, z, p, q) \text{ presque partout sur } \Delta$$

et

$$(ii) \quad \int_0^a \|\sigma_{n_{m_k}}(x) - \sigma_0(x)\|^{p_0} dx \leq 2^{-kp_0}, \quad \int_0^b \|\tau_{n_{m_k}}(y) - \tau_0(y)\|^{p_0} dy \leq 2^{-kp_0}$$

$$\text{et } \iint_{\Delta} \|f_{n_{m_k}}(x, y, 0, 0, 0) - f_0(x, y, 0, 0, 0)\|^{p_0} dx dy \leq 2^{-kp_0}$$

pour $k = 1, 2, \dots$

Lemme 8. *La conclusion du théorème 7 subsiste sous les hypothèses supplémentaires suivantes:*

- (i) *pour $z, p, q \in E$ quelconques fixés $f_n(x, y, z, p, q) \rightarrow f_0(x, y, z, p, q)$ presque partout sur Δ ,*

et

$$(ii) \int_0^a \|\sigma_n(x) - \sigma_0(x)\|^{p_0} dx \leq 2^{-np_0}, \quad \int_0^b \|\tau_n(y) - \tau_0(y)\|^{p_0} dy \leq 2^{-np_0} \text{ et}$$

$$\iint_{\Delta} \|f_n(x, y, 0, 0, 0) - f_0(x, y, 0, 0, 0)\|^{p_0} dx dy \leq 2^{-np_0} \text{ pour } n = 1, 2, \dots$$

Démonstration du lemme 7. Désignons par D un ensemble dénombrable, dense dans E . D'après (24) il est possible, en appliquant la méthode diagonale, de construire une sous-suite $n_{m_1}, n_{m_2}, \dots$ telle que (i) ait lieu pour $z, p, q \in D$ quelconques fixés. Soit $Q \subset \Delta$ un ensemble de mesure nulle, tel que $f_{n_{m_k}}(x, y, z, p, q) \rightarrow f_0(x, y, z, p, q)$ pour tout $(x, y) \in \Delta - Q$ et $z, p, q \in D$. D'après (23), $f_{n_{m_k}}(x, y, z, p, q) \rightarrow f_0(x, y, z, p, q)$ pour tout $(x, y) \in \Delta - Q$ et $z, p, q \in E$. Nous avons ainsi construit une sous-suite ayant la propriété (i) et il ne reste plus qu'à en extraire une sous-suite ayant la propriété (ii).

Le lemme 8 sera démontré à l'aide du théorème 6. Dans ce but, désignons par E_0 l'espace de Banach des suites $u = \{u_n\}_{n=0,1,\dots}$, $u_n \in E$, telles que $\|u_n - u_0\|_E \rightarrow 0$, muni de la norme $\|u\|_{E_0} = \max_{n=0,1,\dots} \|u_n\|_E$.

Lemme 9. *Sous les hypothèses du lemme 8, $\sigma(x) = \{\sigma_n(x)\}_{n=0,1,\dots}$ est une fonction à valeurs dans E_0 , de puissance $p_0^{\text{ième}}$ sommable au sens de Bochner sur l'intervalle $\langle 0, a \rangle$.*

Démonstration du lemme 9.

1° La fonction $\sigma(x)$ admet presque partout sur $\langle 0, a \rangle$ ses valeurs dans E_0 , puisque, d'après (ii), on a $\|\sigma_n(x) - \sigma_0(x)\|_E \rightarrow 0$ presque partout sur $\langle 0, a \rangle$.

2° La fonction $\sigma(x)$ est mesurable. L'espace E étant séparable, il en est de même de E_0 , donc, pour prouver que $\sigma(x)$ est mesurable, il suffit de montrer que pour tout $u \in E_0$ et tout $r > 0$ l'ensemble $e = \{x: \|\sigma(x) - u\|_{E_0} \leq r\}$ est mesurable. Soit $u = \{u_n\}_{n=0,1,\dots}$. Les fonctions $\sigma_n(x)$ étant mesurables, les ensembles $e_n = \{x: \|\sigma_n(x) - u_n\|_E \leq r\}$ le sont aussi et, par conséquent, l'ensemble $e = \bigcap_{n=0}^{\infty} e_n$ est mesurable.

3° La fonction $\|\sigma(x)\|_{E_0}^{p_0}$ est sommable. En effet, en s'appuyant sur (ii) et sur l'inégalité de Minkowski, on obtient

$$\begin{aligned} \left(\int_0^a \|\sigma(x)\|_{E_0}^{p_0} dx \right)^{\frac{1}{p_0}} &\leq \left(\int_0^a \left(\|\sigma_0(x)\|_E + \sum_{n=1}^{\infty} \|\sigma_n(x) - \sigma_0(x)\|_E \right)^{p_0} dx \right)^{\frac{1}{p_0}} \\ &\leq \left(\int_0^a \|\sigma_0(x)\|_E^{p_0} dx \right)^{\frac{1}{p_0}} + 1 < +\infty. \end{aligned}$$

Lemme 10. Si l'on remplace l'espace E par E_0 et si l'on admet $p = p_0$, alors, sous les hypothèses du lemme 8, les fonctions $\sigma(x) = \{\sigma_n(x)\}_{n=0,1,\dots}$, $\tau(y) = \{\tau_n(y)\}_{n=0,1,\dots}$ et $f_n(x, y, z, p, q) = \{f(x, y, z_n, p_n, q_n)\}_{n=0,1,\dots}$, où $z = \{z_n\}_{n=0,1,\dots}$, $p = \{p_n\}_{n=0,1,\dots}$, $q = \{q_n\}_{n=0,1,\dots}$, satisfont aux hypothèses du théorème 6.

Démonstration du lemme 10. En vertu du lemme 9 on a $\sigma \in L_{p_0}(0, a)$. On prouve de même que $\tau \in L_{p_0}(0, b)$, $\{f(x, y, 0, 0, 0)\} \in L_{p_0}(\Delta)$ et que, pour $z, p, q \in E_0$ quelconques fixés, la fonction $f(x, y, z, p, q)$ est mesurable par rapport à (x, y) . La condition de Osgood (18) résulte de (28) moyennant l'hypothèse que la fonction κ est non décroissante.

Démonstration du lemme 8.

1° Soit $z(x, y)$ la solution (à valeurs dans E_0), dont l'existence est assurée par le théorème 6 et le lemme 10, du problème (C-D) pour $z^0 = \{z_n^0\}_{n=0,1,\dots}$, $\sigma(x) = \{\sigma_n(x)\}_{n=0,1,\dots}$, $\tau(y) = \{\tau_n(y)\}_{n=0,1,\dots}$ et $f(x, y, z, p, q) = \{f_n(x, y, z_n, p_n, q_n)\}_{n=0,1,\dots}$, où l'on doit admettre que $z = \{z_n\}_{n=0,1,\dots}$, $p = \{p_n\}_{n=0,1,\dots}$, et $q = \{q_n\}_{n=0,1,\dots}$. Alors, l'unicité des solutions étant établie par le théorème 6, on a $z(x, y) = \{z_n(x, y)\}_{n=0,1,\dots}$, où $z_n(x, y)$ désigne, pour $n = 0, 1, \dots$ fixé, la solution (à valeurs dans E) du problème (C-D) pour $z = z_n$, $\sigma(x) = \sigma_n(x)$, $\tau(y) = \tau_n(y)$ et $f(x, y, z, p, q) = f_n(x, y, z, p, q)$.

2° Comme $z(x, y) = \{z_n(x, y)\}_{n=0,1,\dots}$ admet ses valeurs dans E_0 , on a pour tout $(x, y) \in \Delta$ $\|z_n(x, y) - z_0(x, y)\|_E \rightarrow 0$. Etant donné que $z(x, y)$ est continue au sens de la norme dans E_0 , les fonctions $z_n(x, y)$, $n = 0, 1, \dots$ sont équicontinues au sens de la norme dans E . Donc $\max_{\Delta} \|z_n(x, y) - z_0(x, y)\|_E \rightarrow 0$.

3° Comme $\partial z(x, y)/\partial x = \{\partial z_n(x, y)/\partial x\}_{n=0,1,\dots}$ est une fonction à valeurs dans E_0 , de puissance $p_0^{\text{ième}}$ sommable sur Δ , on a

$$\|\partial z_n(x, y)/\partial x - \partial z_0(x, y)/\partial x\|_E \rightarrow 0 \text{ presque partout sur } \Delta$$

et

$\|\partial z_n(x, y)/\partial x\|_E \leq \|\partial z(x, y)/\partial x\|_{E_0}$ presque partout sur Δ pour $n = 0, 1, \dots$, la fonction $\|\partial z(x, y)/\partial x\|_{E_0}^{p_0}$ étant sommable sur Δ . Il en résulte, en vertu

du théorème de Lebesgue sur l'intégration terme à terme, que $\iint_{\Delta} \|\partial z_n / \partial x - \partial z_0 / \partial x\|^{p_0} dx dy \rightarrow 0$. On prouve de même que

$$\iint_{\Delta} \|\partial z_n / \partial y - \partial z_0 / \partial y\|^{p_0} dx dy \rightarrow 0$$

$$\text{et } \iint_{\Delta} \|\partial^2 z_n / \partial x \partial y - \partial^2 z_0 / \partial x \partial y\|^{p_0} dx dy \rightarrow 0.$$

§ 10. Existence des solutions dans le cas où $f(x, y, z, p, q)$ satisfait à la condition de Osgood par rapport à p et q .

Le théorème suivant généralise les résultats de Conti [3] et [4].

Théorème 8. *Soit E un espace à n dimensions. Admettons l'hypothèse (H) et supposons de plus que la fonction $f(x, y, z, p, q)$ satisfait à la condition de Osgood*

$$\|f(x, y, z, p, q) - f(x, y, z, \tilde{p}, \tilde{q})\| \leq \kappa(\|p - \tilde{p}\| + \|q - \tilde{q}\|)$$

pour tout $(x, y) \in \Delta$ et $z, p, q, \tilde{p}, \tilde{q} \in E$, où la fonction κ a les mêmes propriétés que dans le cas du théorème 6, et à la condition

$$\|f(x, y, z, 0, 0)\| \leq \|f(x, y, 0, 0, 0)\| + K \cdot (1 + \|z\|), \quad K = \text{const},$$

pour tout $(x, y) \in \Delta$ et $z \in E$. Dans ces conditions il existe une solution du problème (C-D). Si les fonctions $\sigma(x)$, $\tau(y)$ et $f(x, y, 0, 0, 0)$ sont essentiellement bornées, alors il existe une solution dont les dérivées $\partial z / \partial x$, $\partial z / \partial y$ et $\partial^2 z / \partial x \partial y$ sont aussi essentiellement bornées.

Démonstration.

1° De même que dans le cas du théorème 6, il existe une constante L telle que l'inégalité (19) est vérifiée. Posons

$$N(x, y) = \|f(x, y, 0, 0, 0)\| + L \cdot$$

$$\cdot \left(1 + \|z\| + \|\sigma(x)\| + \|\tau(y)\| + \left\| \int_{x^0}^x \sigma(u) du \right\| + \left\| \int_{y^0}^y \tau(v) dv \right\| \right)$$

et soit $M(x, y)$ une fonction non négative, de puissance p ième sommable sur Δ , satisfaisant à l'équation

$$M(x, y) = N(x, y) + L \cdot$$

$$\cdot \left(\iint_{\Delta_{xy}} M(u, v) du dv + \int_{\sigma(x)}^y M(x, v) dv + \int_{h(y)}^x M(u, y) du \right)$$

presque partout sur Δ .

2° Désignons par $C(\Delta)$ l'espace de Banach de toutes les fonctions $z(x, y)$ à valeurs dans E , continues sur Δ , muni de la norme $\|z\|_C = \max_{\Delta} \|z(x, y)\|_E$. Soit W l'ensemble de toutes les fonctions $z(x, y)$ appartenant à $C(\Delta)$ et satisfaisant sur Δ à l'inégalité

$$(W) \quad \|z(x, y)\|_E \leq \|z^0\|_E + \left\| \int_{x^0}^x \sigma(u) du \right\|_E + \\ + \left\| \int_{y^0}^y \tau(v) dv \right\|_E + \iint_{\Delta_{xy}} M(u, v) du dv.$$

Désignons encore par W_1 le sous-ensemble de l'ensemble W composé de toutes les fonctions $z(x, y)$ appartenant à $L_p^*(\Delta)$ et satisfaisant aux conditions (5), (6) et à l'inégalité

$$(W_1) \quad \|\partial^2 z(u, v) / \partial u \partial v\|_E \leq M(x, y) \text{ presque partout sur } \Delta.$$

L'ensemble W est fermé et convexe dans l'espace $C(\Delta)$, $W_1 \subset W$ et l'ensemble W_1 est compact dans $C(\Delta)$ en vertu du théorème 2 et du théorème d'Arzela.

3° En suivant l'exemple de Ciliberto [2], § 1, p. 17-19, nous définissons sur l'ensemble W une opération T qui fait correspondre à la fonction $z \in W$ la solution $z^* = Tz$ du problème (C-D) suivant:

$$\partial^2 z^* / \partial x \partial y = f(x, y, z(x, y), \partial z^* / \partial x, \partial z^* / \partial y) \text{ presque partout sur } \Delta,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^a \|\varepsilon^{-1} [z^*(x + \varepsilon, g(x)) - z^*(x, g(x))] - \sigma(x)\|^p dx = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^b \|\varepsilon^{-1} [z^*(h(y), y + \varepsilon) - z^*(h(y), y)] - \tau(y)\|^p dy = 0,$$

$$z^*(x^0, y^0) = z^0.$$

En vertu des théorèmes 6 et 7, l'opération T est définie univoquement et continue sur W au sens de la norme $\|\cdot\|_C$.

4° En vertu du théorème 6 on a $\|Tz - z_n\|_p^* \rightarrow 0$, où la norme $\|\cdot\|_p^*$ est définie par la formule (25), $z_0(x, y) \equiv 0$ sur Δ ,

$$z_n(x, y) = z^0 + \int_{x^0}^x \sigma(u) du + \int_{y^0}^y \tau(v) dv + \\ + \iint_{\Delta_{xy}} f(u, v, z(u, v), \partial z_{n-1}(u, v) / \partial u, \partial z_{n-1}(u, v) / \partial v) du dv.$$

En s'appuyant sur l'inégalité (19) et sur la définition de la fonction $M(x, y)$ on prouve aisément par induction que $z_n \in W_1$ pour $n = 0, 1, \dots$,

d'où il s'ensuit que $Tz \in W_1$. Donc $T(W) \subset W_1$ et, par conséquent, $T(W)$ est un ensemble compact dans l'espace $C(\Delta)$.

5° Comme l'opération T est continue sur l'ensemble W fermé et convexe dans $C(\Delta)$, $T(W) \subset W$ et $T(W)$ est un ensemble compact dans $C(\Delta)$, donc, en vertu d'un lemme de Mazur [8] (lemme sur le surensemble fermé convexe minimal) et du théorème du point fixe de Schauder [9], il existe dans l'ensemble W un point fixe de l'opération T .

6° Ce point fixe de l'opération T appartient à l'ensemble W_1 et il est une solution du problème (C-D). Si les fonctions $\sigma(x)$, $\tau(y)$ et $f(x, y, 0, 0, 0)$ sont essentiellement bornées, il en est de même de la fonction $M(x, y)$ et il résulte de l'inégalité (W_1) que les dérivées $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ et $\partial^2 z/\partial x \partial y$ de cette solution sont essentiellement bornées.

Remarque. Le théorème 6 peut aussi être démontré en appliquant le théorème de Schauder directement à l'opération F , mais la démonstration devient alors plus pénible.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Bielecki, A., *Une remarque sur l'application de la méthode de Banach-Cacciopoli-Tikhonov dans la théorie de l'équation $s = f(x, y, z, p, q)$* , Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **4**, 5 (1956), p. 265-268.
- [2] Ciliberto, C., *Il problema di Darboux per un'equazione di tipo iperbolico in due variabili*, Ricerche di Mat., **4** (1955), p. 15-29.
- [3] Conti, R., *Sul problema di Darboux per l'equazione $z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y)$* , Annali dell'Univ. di Ferrara (N. S.), Ser. VII, Sc. Mat., **2**, 11 (1953), p. 129-140.
- [4] Conti, R., *Sull'equazione integrodifferenziale di Darboux-Picard*, Le Matematiche, **13**, 1 (1958), p. 30-39.
- [5] Foias, C., Gussi, G. et Poenaru, V., *Une méthode directe dans l'étude du problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles, hyperboliques, du second ordre, à deux variables*, Revue de Mathématiques pures et appliquées **1**, 2 (1956), p. 61-98.
- [6] Kiszyński, J., *Sur l'existence et l'unicité des solutions des problèmes classiques relatifs à l'équation $s = F(x, y, z, p, q)$* , Annales Univ. M. Curie-Skłodowska, Sectio A, **11** (1957), p. 73-108.
- [7] Kiszyński, J., *Application de la méthode des approximations successives dans la théorie de l'équation $\partial^2 z/\partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y)$* , Annales Univ. M. Curie-Skłodowska, Sectio A, **14** (1960), p. 63-84.
- [8] Mazur, S., *Über die kleinste konvexe Menge, die eine gegebene kompakte Menge enthält*, Studia Math., **2** (1930), p. 7-9.
- [9] Schauder, J., *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Math., **2** (1930), p. 171-180.
- [10] Walter, W., *Eindeutigkeitsätze für gewöhnliche, parabolische und hyperbolische Differentialgleichungen*, Math. Zeitschrift, **74** (1960), p. 191-208.
- [11] Ważewski, T., *Sur un procédé de prouver la convergence des approximations successives sans utilisation des séries de comparaison*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. des sc. math., astr. et phys., **8**, 1 (1960), p. 47-52.

Streszczenie

W niniejszej pracy rozważamy wprowadzone przez R. Contiego [3], [4] rozwiązania o pochodnych sumowalnych zadań Cauchy'ego i Darboux dla równania $\partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y)$. Podajemy równoważną, ale inną niż Conti definicję takich rozwiązań, co pozwala dokładniej zanalizować, w jakim sensie spełnione są warunki graniczne. Zasadniczy przebieg rozważań jest podobny do przedstawionego w streszczeniu pracy [7].

Резюме

В этой работе мы рассматриваем решения, введенные Р. Конти [3], [4] с суммовальными производными, относящиеся к задаче Коши и Дарбу для уравнения $\partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y)$. Мы даем равносильное, но иное, чем Конти, определение таких решений, что позволяет точнее проанализировать, в каком смысле выполнены граничные условия. Принципиальный ход рассуждений похож на представленный в резюме работы [7].

