ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XIII, 4 SECTIO A 1959

Z Zakładu Matematyki III, Wydz. Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: doc. dr Krzysztof Tatarkiewicz

KRZYSZTOF TATARKIEWICZ

Sur une équation généralisant les équations linéaires avec second membre

O równaniu uogólniającym równania liniowe niejednorodne

Об уревнении обобщающем линейное неоднородное уравнение

1. Considérations préliminaires. Soit l'équation

$$x'' = f(t, x, x') \tag{1.1}$$

où la fonction $f = f(t, x, z)$ vérifie les conditions

$$a_2 \leqslant \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z} \leqslant a_1, \quad b_2 \leqslant \frac{\partial f}{\partial x} \leqslant b_1 < 0 \quad \text{et} \quad |f(t,0,0)| \leqslant N$$

où bien des conditions plus faibles, analogues aux conditions (0.2.4) de mon travail [1] (voir n° 2), et où

$$a_i^2 + b_j < 0 .$$

Dans le cas où (1.1) est une équation linéaire, nous aurons

$$x'' - 2a(t)x' - b(t)x = g(t) \tag{1.2}$$

où $a_2 \leqslant a(t) \leqslant a_1$, $b_2 \leqslant b(t) \leqslant b < 0$ et $|g(t)| < N$.

Le cas considéré dans le travail [1] correspond à $N = 0$.

Une étude rapide de quelques exemples nous montrera que si l'on admet la possibilité $N > 0$, le comportement de (1.1) devient essentiellement plus compliqué.

1.3. L'équation

$$x'' - 2ax' - bx = 1$$

où a, b sont deux constantes telles que $a^2+b<0$, n'a pas de solutions oscillantes (dans le sens usuel) et toutes ses solutions tendent vers $-1/b$, donc elles ne tendent pas vers 0 (mais restent bornées).

1.4. Par contre, si nous considérons l'équation

$$x''-2ax'-bx=\sin\omega t,$$

où $a^2+b<0$ et $\sqrt{-a^2-b}$ est un nombre proche de ω, nous aurons bien résonance (de première espèce). Les solutions seront oscillantes et bornées, mais leurs bornes pourront être beaucoup plus grandes que celle de $|\sin\omega t|$, égale à 1.

1.5. Les solutions de l'équation de l'exemple 1.3 n'étaient pas oscillantes, mais — sauf une — elles avaient une infinité d'extrema. Dans l'exemple qui suit, nous allons construire une équation admettant une infinité de solutions monotones.

Dans ce but posons

$$f(t,x,z)=\begin{cases}1-x-z & z\geqslant 1-x\\ 0 \qquad\text{pour} & -1-x\leqslant z\leqslant 1-x\\ -1-x-z & z\leqslant -1-x\end{cases}$$

Toutes les solutions de l'équation (1.1) qui vérifient les conditions $x(0)=a$, $x'(0)=0$ où $|a|\leqslant 1$, seront de la forme $x(t)\equiv a$, donc elles seront monotones.

Si l'on tient compte de ces exemples, il n'est pas surprenant que les résultats obtenus ici soient plus faibles que ceux du travail [1].

2. Le théorème. Soit l'équation (1.1)

Appelons $\mathbf{W}(a_1, a_2, b_1, b_2, N)$ *ou* $\mathbf{W}$ *l'hypothèse suivante*:

1° *la fonction* $f=f(t,x,z)$ *est définie et continue pour toutes les valeurs de* x, z *et pour* $t\geqslant T^*$,

2° *il y a unicité des solutions de* (1.1),

3° *il existe des constantes* a_1, a_2, b_1, b_2, N *telles que pour* $t\geqslant T^*$ *on ait*

$$(2.1)\quad \begin{aligned} 2a_2z+b_2x-N &\leqslant f(t,x,z)\leqslant 2a_1z+b_1x+N && x\geqslant 0, z\geqslant 0\\ 2a_1z+b_2x-N &\leqslant f(t,x,z)\leqslant 2a_2z+b_1x+N &\quad\text{pour}\quad & x\geqslant 0, z\leqslant 0\\ 2a_2z+b_1x-N &\leqslant f(t,x,z)\leqslant 2a_1z+b_2x+N && x\leqslant 0, z\geqslant 0\\ 2a_1z+b_1x-N &\leqslant f(t,x,z)\leqslant 2a_2z+b_2x+N && x\leqslant 0, z\leqslant 0.\end{aligned}$$

Nous aurons alors

Théorème C1. *Si l'équation* (1.1) *vérifie l'hypothèse* $W(a_1, a_2, b_1, b_2, N)$ *où* $a_1 < 0$, $a^2 + b_1 < 0$, *alors il existe un nombre* $B = B(a_1, b_1)$ *tel que, si* $b_2 > B(a_1, b_1)$, *toutes ses solutions sont bornées.*

Il existe même alors une constante Γ *(dépendant de* a_1, a_2, b_1, b_2 *et* N*) telle que pour chaque solution* $x = x(t)$ *de* (1.1) *on a*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} |x(t)| \leqslant \Gamma.$$

Les dérivées premières des solutions ont aussi les mêmes propriétés.

La fonction $B = B(a_1, b_1)$ de ce théorème est *la même* que celle du Théorème B1 de mon travail [**1**]. Donc, pour constater si les hypothèses de ce théorème sont satisfaites, il suffit de vérifier si

$$b_2 > b_1 \Phi(a_1, b_1, b_2),$$

où Φ est donné par (1.4.1) de mon travail [**1**].

Des considérations semblables aux raisonnements du n° 0.3 de mon travail [**1**] nous conduisent à un théorème un peu moins général que le Théorème C1, mais plus élégant que lui, et qui en est une conséquence.

Théorème C1$^{\text{bis}}$. *Supposons que la fonction* $f = f(t, x, z)$, *définie pour tous les* x, z *et pour* $t \geqslant T^*$, *ait des dérivées continues et que*

$$a_2 \leqslant \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}(t, x, z) \leqslant a_1 < 0, \qquad b_2 \leqslant \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, z) \leqslant b_1 < 0$$

où

$$a_2^2 + b_1 < 0$$

et

$$|f(t, 0, 0)| \leqslant N, \tag{2.2}$$

Alors il existe un nombre $B = B(a_1, b_1)$ *tel que, si*

$$b_2 > B(a_1, b_1)$$

toutes les solutions (et leurs dérivées premières) de l'équation

$$x'' = f(t, x, x')$$

sont bornées, et il existe même une constante Γ *(dépendant de* a_1, a_2, b_1, b_2, N*) telle que pour chaque solution* $x = x(t)$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} |x(t)| \leqslant \Gamma.$$

L'énoncé du théorème analogue au Théorème $B1^{ter}$ et relatif à l'équation linéaire avec second membre (1.2) peut être laissé au lecteur.

3. Une estimation. La démonstration du Théorème C1 est extremment pénible à cause des calculs compliqués qu'elle exige (la méthode de la démonstration sera la même que celle du Théorème B1 de mon travail [**1**]). Nous nous bornerons donc ici à l'esquisser.

Nous allons commencer par une estimation. Nous avons supposé que l'hypothèse **W** soit verifiée. Considérons l'équation différentielle

$$z''-2a_2z'-b_2z=-N, \tag{3.1}$$

qui a comme solution particulière $z_1 = N/b_2$.

Appliquons aux équations (1.1) et (3.1) les transformations $\xi = x+-N/b_2$ et $\zeta = z-N/b_2$ respectivement. Nous aurons, pour $\xi \geqslant -N/b_2 \geqslant 0$ et $\eta \geqslant 0$,

$$2a_2\eta+b_2\xi \leqslant f(t, \xi+N/b_2, \eta) = \varphi(t, \xi, \eta)$$

et les fonctions $\xi = \xi(t)$, $\zeta = \zeta(t)$ vérifieront les équations

$$\xi'' = \varphi(t, \xi, \xi'), \quad \zeta''-2a_2\zeta'-b_2\zeta = 0.$$

Si les solutions de (1.1) et de (3.1) vérifient les conditions initiales

$$x(0) = z(0) = \gamma > 0, \quad x'(0) = z'(0) = \beta > 0$$

alors $\xi = \xi(t)$ et $\zeta = \zeta(t)$ verifieront les conditions $\xi(0) = \zeta(0) = \gamma-N/b_2 \geqslant -N/b_2 > 0$ et $\xi'(0) = \zeta'(0) = \beta > 0$. Vu les resultats du n° 1.1 de mon travail [**1**] nous aurons donc dans $(0, T)$, où T est le premier maximum à droite de zéro de $\zeta = \zeta(t)$, l'estimation

$$-N/b_2 < \zeta(t) \leqslant \xi(t) \quad \text{et} \quad 0 < \zeta'(t) \leqslant \xi'(t)$$

donc

$$0 < z(t) \leqslant x(t) \quad \text{et} \quad 0 < z'(t) \leqslant x'(t)$$

pour $t \in (0, T)$. En plus, si $a_2 < 0$ et $\sigma_2^2 = -a_2^2-b_2^2 < 0$, alors $T \leqslant \pi/2\sigma_2$.

Considérons maintenant l'équation

$$y''+2a_1y'-b_1y = N \tag{3.2}$$

qui a comme solution particulière $y_1 = -N/b_1$.

Appliquons aux équations (1.1) et (3.2) les transformations $\xi_1 = x+N/b_1$ et $\eta = y+N/b_1$ respectivement. Nous aurons, pour $\xi_1 \geqslant N/b_1$ et $\zeta \geqslant 0$,

$$\psi(t, \xi_1, \zeta) \underset{df}{=} f(t, \xi_1-N/b_1, \zeta) \leqslant 2a_1\zeta+b_1\xi_1$$

et les fonctions $\xi = \xi_1(t), \eta = \eta(t)$ vérifieront les équations

$$\xi_1'' = \psi(t, \xi_1, \xi_1'),$$

$$\eta'' - 2a_1\eta' - b_1\eta = 0. \tag{3.3}$$

Considérons les solutions de (1.1) et de (3.2) qui vérifient les conditions initiales

$$x(0) = y(0) = \gamma \geqslant 0, \quad x'(0) = y'(0) = \beta > 0.$$

Si $\gamma \geqslant N/-b_1$ nous serons dans le même cas que ci-dessus. Supposons donc que $0 \leqslant \gamma < N/-b_1$. Alors $\xi_1 = \xi_1(t)$ et $\eta = \eta(t)$ vérifieront les conditions

$$\xi_1(0) = \eta(0) = \gamma + N/b_1 < 0, \quad \xi_1'(0) = \eta'(0) = \beta > 0.$$

Si $\sigma_1^2 = -a_1^2 - b_1 < 0$, il existent alors des nombres t_1 et t_2 tels que $0 < t_1 \leqslant t_2 \leqslant \pi/\sigma_1$, $\eta(t_1) = 0$, $\xi_1(t_2) = 0$,

$$0 > \eta(t) \geqslant \xi_1(t) \text{ pour } t \epsilon (0, t_1),$$

$$\eta(t) > 0 > \xi_1(t) \text{ pour } t \epsilon (t_1, t_2).$$

En plus nous aurons

$$\eta'(t_1) > \xi_1'(t_2) > 0.$$

Pour $t \epsilon (t_2, \overline{T})$ où $\overline{T}$ est le premier maximum à droite de zéro de la fonction $\xi_1 = \xi_1(t)$ nous allons trouver une autre estimation. Soit $\eta_1 = \eta_1(t)$ la solution de (3.3) qui vérifie les conditions $\eta_1(t_2) = 0$, $\eta'(t_2) = \xi'(t_2)$. Évidemment si pour deux nombres $\tau_1, \tau_2, \epsilon(t_2, \overline{T}\eta(\tau_1) = \eta_1(\tau_2)$, alors $\eta'(\tau_1) > \eta_1'(\tau_2)$.

En revenant aux fonctions $x = x(t)$ et $y = y(t)$ nous voyons que

$$x(t) \leqslant \overline{y}(t) \underset{df}{=} \begin{cases} y(t) & t \epsilon (0, t_1) \\ -N/b_1 \quad \text{pour} & t \epsilon (t_1, t_2), \\ y_1(t) & t \epsilon (t_2, \overline{T}), \end{cases}$$

où $y_1(t) = \eta_1(t) - N/b_1$, et que si $-N/b_1 \neq \tau_i \epsilon (0, \overline{T})$ et $x(\tau_2) = \overline{y}(\tau_1)$ alors

$$x'(\tau_2) < \overline{y}'(\tau_1).$$

Il s'ensuit que $x = x(t)$ aura un maximum pour $\overline{T} < 2\pi/\sigma_1$ (et si $\dot{a}_1 < 0$ alors $\overline{T} < \pi/\sigma_1$) et que $x(\overline{T}) \leqslant y(\overline{T})$.

On peut faire des estimations semblables pour d'autres signes des valeurs initiales et d'autres estimations (2.1).

4. Une autre estimation. Nous commencerons par chercher des conditions sous lesquelles les valeurs absolues des extrema consécutifs décroissent (s'il existent et sont assez grands) Dans ce but nous aurons besoin d'une estimation, généralisant celle du n° 1.3 de mon travail [**1**].

Considérons les solutions des équations linéaires à coefficients constants, avec second membre

$$x_i'' - 2a_1 x_i' - b_i x_i = N, \qquad i = 1, 2, \tag{4.1}$$

qui vérifient les conditions initiales

$$x_i(0) = 0, \quad x_i'(0) = \gamma > 0.$$

Posons

$$\sigma_i = \sqrt{-a_1^2 - b_i}$$

Il est facile de vérifier que nous aurons

$$x_1(t) = -\frac{N}{b_1} + e^{a_1 t}\left\{\frac{1}{\sigma_1}\left[\gamma - \frac{a_1 N}{b_1}\right]\sin\sigma_1 t + \frac{N}{b_1}\cos\sigma_1 t\right\}$$

$$x_2(t) = -\frac{N}{b_2} + e^{a_1 t}\left\{\frac{1}{\sigma_2}\left[\gamma - \frac{a_1 N}{b_2}\right]\sin\sigma_2 t + \frac{N}{b_2}\cos\sigma_2 t\right\}.$$

Nous supposerons maintenant que γ est assez grand, à savoir

$$\gamma \geqslant -N/a_1, \tag{4.2}$$

Vu la forme des conditions (2.1) (on le voit encore plus aisément d'après (2.2) dans le Théorème C1$^{\text{bis}}$) les solutions de (1.1), qui restent dans le voisinage de l'axe des t (ce qui correspond aux petits $|\gamma|$), peuvent avoir une forme quelconque; une hypothèse du type de (4.2) est donc nécessaire.

Désignons par T_1 la valeur de t pour laquelle $x_1 = x_1(t)$ admet son premier maximum à droite de 0 et par T_2 la valeur de t pour laquelle $x_2 = x_2(t)$ admet sont premier minimum à gauche de 0.

Comme au n° 1.2 de mon travail [**1**], nous aurons

$$T_1 = \frac{1}{\sigma_1}\operatorname{arctg}\frac{-\gamma\sigma_1}{N + a_1\gamma}, \qquad T_2 = \frac{1}{\sigma_2}\operatorname{arctg}\frac{-\gamma\sigma_2}{N + a_1\gamma} - \frac{\pi}{\sigma_2}.$$

Après de simples transformations trigonométriques, on obtient

$$x_1(T_1) = -\frac{N}{b_1} - \frac{1}{b_1}\sqrt{N^2 + 2a_1 N\gamma - b_1\gamma^2}\cdot\exp\left[\frac{a_1}{\sigma_1}\operatorname{arctg}\frac{-\gamma\sigma_1}{N + a_1\gamma}\right], \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} x_2(T_2) &= \\ &= -\frac{N}{b_2} + \frac{1}{b_2}\sqrt{N^2 + 2a_1 N\gamma - b_2\gamma^2}\cdot\exp\left[\frac{a_1}{\sigma_1}\left(\operatorname{arctg}\frac{-\gamma\sigma_2}{N + a_1\gamma} - \pi\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.4}$$

5. Condition de stabilité. Soit maintenant $x = x(t)$ une solution de l'équation (1.1) vérifiant les conditions

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = \gamma > 0.$$

Étant donné que (1.1) vérifie l'hypothèse $\mathbf{W}(a_1, a_2, b_1, b_2, N)$, vu les estimations du n° 3, nous aurons

$$(5.1)\qquad \begin{array}{llll} 0 < x(t) \leqslant x_1(t) & \text{pour} \quad x > 0,\ x' > 0 & \text{et} & t \in (0, T_1) \\ x(t) \leqslant x_2(t) < 0 & \text{pour} \quad x < 0,\ x' > 0 & \text{et} & t \in (T_2, 0) \end{array}$$

et des inégalités semblables pour les dérivées. De ces inégalités pour les dérivées il s'ensuit que $x = x(t)$ aura dans $(T_2, 0)$ des minima, et dans $(0, T_1)$ des maxima. La valeur absolue du premier minimum à gauche de 0 sera désigné par M_2 et la valeur du premier maximum à droite de 0 sera désignée par M_1. Entre ces extrema il n'y a pas d'autres. Vu (5.1) nous aurons $x_1(T_1) \geqslant M_1$, $M_2 \geqslant -x_2(T_2)$. Donc

$$\frac{M_1}{M_2} \leqslant \frac{x_1(T_1)}{|x_2(T_2)|} \underset{df}{=} \Omega(a_1, b_1, b_2, N, \gamma).$$

De (4.3) et (4.4) on peut calculer la valeur exacte de Ω et constater que

$$L \underset{df}{=} \lim_{\gamma\to\infty} \Omega(a_1, b_1, b_2, N, \gamma) =$$

$$= \frac{\sqrt{-b_2}}{\sqrt{-b_1}} \exp\left[\frac{a_1}{\sigma_1}\operatorname{arctg}\frac{\sigma_1}{-a_1} - \frac{a_1}{\sigma_2}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sigma_2}{-a_1} - \pi\right)\right].$$

Cette limite est indépendante de N, et on voit aisément que l'inégalité

$$L < 1$$

est équivalente à

$$b_2 > b_1 \Phi(a_1, b_1, b_2),$$

où Φ est définie par (1.4.1), du travail [**1**], donc à

$$(5.2)\qquad b_2 > B(a_1, b_1),$$

où la fonction $B = B(a_1, b_1)$ a été définie au n° 1.5 du travail [**1**]. Il n'est pas surprenant qu'il en soit ainsi, étant donné que, pour des γ très grand, l'influence de la constante N devrait devenir à peu près nulle.

Dans les hypothèses du théorème à démontrer nous avons supposé que la condition (5.2) soit vérifiée. En vertu de la définition de L il existe donc un $\gamma_0 \geqslant N/-a_1$ tel que $\Phi(a_1, b_1, b_2, N, \gamma) < 1$ pour $\gamma \geqslant \gamma_0$. Mais, alors, (comme au n° 1.6 du travail [**1**]) il existe un $\eta > 0$ tel que

$$M_1 < M_2/(1+\eta). \tag{5.3}$$

6. Relation entre le nombre γ et les extréma. Étudions maintenant la relation entre le nombre γ et la valeur absolue M de l'extremum le plus proche.

Supposons que $x(0) = 0$, $x'(0) = \gamma > 0$, et que, pour $t = \tau$ la solution $x = x(t)$ ait son premier maximum à droite de 0. Nous aurons $\tau < \pi/2\sigma_1$.

Posons

$$M(\gamma) = x(\tau).$$

En partant des estimations (2.1) et en résolvant l'évquation (4.1) pour $i = 1$ et en résolvant l'équation

$$y_i'' - 2a_2 y_i' - b_i y_i = -N, \qquad i = 1, 2, \tag{6.1}$$

pour $i = 1$, nous obtenons les inégalités

$$M^-(\gamma) \leqslant M(\gamma) \leqslant M^+(\gamma),$$

où $M^+(\gamma) = x_1(T_1)$ est donné par (4.3). La valeur de $M^-(\gamma)$ qu'on obtient en résolvant (6.1) s'exprime aussi par des fonctions élémentaires. Pour des grandes valeurs de γ, les fonctions $M^-(\gamma)$ et $M^+(\gamma)$ croissent approximativement comme $c\gamma$ (où c peut être calculée facilement). Donc, si γ est assez grand, $M(\gamma)$ doit aussi être grande — mais ne peut pas être trop grande.

Considérons maintenant une solution $x = x(t)$ telle que

$$x(0) = M, \quad x'(0) = 0.$$

En partant encore des estimations (2.1) on peut voir que si M est assez grand, il existe un $\tau > 0$ tel que $x(\tau) = 0$ et $0 < \tau < \pi/\sigma_{21}$, où nous avons posé $\sigma_{21}^2 = -a_2^2 - b_1$ c'est-à-dire, que, si M est assez grand, $x = x(t)$ a un zéro au point τ et on peut calculer la valeur de la dérivée

$$\gamma(M) \underset{df}{=} x'(\tau).$$

On peut montrer qu'on a alors (de même qu'au n° 2.4 du travail [**1**])

$$0 < \gamma^-(M) \leqslant |\gamma(M)| \leqslant \gamma^+(M),$$

où les fonctions $\gamma^-(M)$ et $\gamma^+(M)$ sont des fonctions croissantes de M. Donc $\gamma(M)$ doit être grand en même temps que M, mais ne peut pas être trop grand.

7. Les "petites" solutions. Il nous faut encore considérer le comportement des solutions qui n'ont pas de grandes valeurs initiales, par exemple

$$|x(0)| \leqslant M^+(\gamma_0), \quad |x'(0)| \leqslant \gamma_0. \tag{7.1}$$

Pour fixer les idées soit

$$M_0 = x(0) \geqslant 0.$$

Supposons que $x'(0) = \beta$. Si $\beta < 0$, alors, en partant des estimations (2.1), nous verrons que ou bien il y aura un plus petit $\tau > 0$ tel que $x(\tau) = 0$ et $x'(\tau) = \gamma < 0$, ou bien ce τ n'existera pas. Si un tel τ n'existe pas, alors ou bien $x = x(t)$ est une fonction positive monotone, donc $|x(t)| < M_0$, ou bien il existe un plus petit $\tau_1 > 0$ tel que $x'(\tau_1) = 0$, et $0 < x(\tau_1) < M$. Par contre si un tel τ existe, γ doit être petit $|\gamma| < \lambda\gamma_0$ (où λ est une constante facile à calculer), donc encore: ou bien $x = x(t)$ est monotone — mais alors on peut aisément voir qu'elle ne peut pas trop décroître, ou bien il existe un plus petit $\tau_2 > \tau$ tel que $x'(\tau_2) = 0$ — mais alors $x(\tau_2)$ ne peut pas être trop grande, par exemple $|x(\tau_2| \leqslant \Gamma$. on peut supposer que $\Gamma \geqslant M^+(\gamma_0)$.

Supposons maintenant que $\beta \geqslant 0$. De (7.1) il s'ensuit que β doit être assez petit, et on peut constater que $x = x(t)$ ou bien reste tout le temps monotone et pas trop grande, ou bien elle a un maximum qui n'est pas trop grand $\leqslant \Gamma$.

En résumé nous voyons qu'il existe une constante Γ dépendante de a_1, a_2, b_1, b_2 et de N (ou — si l'on veut — de la fonction $f = f(t, x, z)$) et telle qui si les conditions initiales vérifient (7.1), les solutions correspondantes satisfont à la condition

$$|x(t)| \leqslant \Gamma. \tag{7.2}$$

Il existe une autre constante Γ_1 telle que

$$|x'(t)| < \Gamma_1. \tag{7.3}$$

8. Les "grandes" solutions. Supposons maintenant que les conditions (7.1) ne soient pas vérifiées.

Si nous supposons que $|x(0)| \leqslant M^+(\gamma_0) = M^+$ et $|x'(0)| > \gamma_0$, il existera un $\tau > 0$, tel que $|x(\tau)| > M^+$ ou bien il n'existera pas. Dans ce dernier cas, puisque $M^+ \leqslant \Gamma$, la solution vérifiera toujours la condition (7.2) (on peut montrer que la condition (7.3) sera aussi vérifiée). Il nous ne reste donc que le cas $|x(0)| > M^+$.

Pour fixer les idées, supposons que $x(0) > M^+$. Si $x'(0) \geqslant 0$ il existera un plus petit $\tau \geqslant 0$ pour lequel $x = x(t)$ admettra son premier maximum à droite de zéro. De même, si $x'(0) < 0$, il existera un $\tau < 0$ tel que pour $t = \tau$ la solutions $x = x(t)$ admettra son premier maximum à gauche de zéro. Dans les deux cas on aura $x(\tau) > M^{+}$.

Il suffit donc de considérer le cas

$$M^{(1)} = x(0) > M^{+}, \quad x'(0) = 0.$$

Nous avons supposé la condition (5.2) vérifiée. Donc, si nous désignons par $M^{(2)}$ la valeur absolue du plus proche extremum à droite (qui alors existe), nous aurons, en tenant compte de (5.3) (ici $M^{(1)} = M_2$, $M^{(2)} = M_1$)

$$M^{(2)} < M^{(1)}(1+\eta)^{-1}$$

et ainsi de suite. Il existera un k tel que le k-ième extremum $M^{(k)}$ aura comme valeur absolue

$$M^{(k)} < M^{(1)}(1+\eta)^{1-k} \leqslant M^{+} = M^{+}(\gamma_0)$$

et nous retomberons sur le cas du n° 7.

En résumant nous voyons, qu'à part un nombre éventuel fini d'oscillations (dont les amplitudes décroissent plus vite qu'une suite géométrique de quotient < 1), chaque solution vérifie les conditions (7.2) et (7.3), ce qui achève la démonstration du Théorème C1.

9. Le cas $0 < a_2$. On peut démontrer, dans ce cas un théorème analogue au Théorème C1.

Théorème C2. *Si l'équation* (1.1) *vérifie l'hypothèse* $\mathbf{W}(a_1, a_2, b_1, b_2, N)$, *où* $0 < a_1$, $a_1^2 + b_1 < 0$, *alors il existe un nombre* $B = B(a_2, b_1)$ *tel que si* $b_2 > B(a_2, b_1)$ *toutes ses solutions soumises à des conditions initiales assez grandes sont oscillantes et ne sont pas* ε*-bornées pour* $\varepsilon > 0$ *(il en est de même de leurs dérivées premières).*

Remarquons que les solutions qui vérifient de petites conditions initiales peuvent avoir une allure quelconque.

Nous dirons qu'il y de *la contre-résonance* pour une équation (3.1.1) vérifiant la condition $\mathbf{W}$ où $a_2 > 0$, $b_1 < 0$, *s'il existe des solutions* ε*-bornées pour* $\varepsilon > 0$, *avec des conditions initiales aussi grandes que l'on voudra.* Du Théorème C2 il s'ensuit que la contre-résonance n'est possible que si $b_2 \leqslant B(a_2, b_1)$. Il est facile à vérifier que pour chaque système des nombres a_i, b_i tels que $b_2 \leqslant B(a_2, b_1)$ et vérifiant les autres hypothèses du Théorème C2, il existe une fonction $f = f(t, x, z)$ (elle peut être même linéaire en x, z) telle que pour l'équation (1.1) nous aurons la contre-résonance.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Tatarkiewicz, K., *Sur la résonance de seconde espèce*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **13** (1959), p. 33–74.

Streszczenie

W pracy tej uogólniam wyniki mej pracy *O rezonansie drugiego rodzaju* (Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **13**, (1959), str. 33 – 74) na równania $x'' = f(t, x, x')$ gdzie $f = f(t, x, z)$ spełnia warunek $|f(t, 0, 0)| \leqslant N$ (w poprzedniej pracy było dopuszczalne tylko $N = 0$), oraz warunki $b_2 \leqslant \partial f/\partial x \leqslant b_1 < 0$, $a_2 \leqslant \frac{1}{2}\partial f/\partial z \leqslant a_1$, przy czym $a_i^2 + b_j < 0$ (lub nieco słabsze warunki (2. 1)).

Klasa tych równań obejmuje równania różniczkowe liniowe niejednorodne $x'' - 2a(t)x' - b(t)x = g(t)$ gdzie $g = g(t)$ jest funkcją ograniczoną.

Ze względu na możliwość równoczesnego występowania rezonansów obu rodzajów, uzyskane wyniki są nieco słabsze niż dla równań w których $N = 0$. Proste przykłady pokazują, że przy założeniach tej pracy tezy twierdzeń mej pracy „O rezonansie drugiego rodzaju" (np. Twierdzenie $\mathrm{B1}^{\mathrm{bis}}$) będą naogół fałszywe.

Резюме

В этой работе обобщены результаты моей работы „О резонансе второго вида" (Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **13** (1959), стр. 33 – 74) на случай уравнений $x'' = f(t, x, x')$ где $f = f(t, x, z)$ выполняет условие $|f(t, 0, 0)| \leqslant N$, (в предыдущей работе было допустимо только $N = 0$), а также условия $b_2 \leqslant \partial f/\partial x \leqslant b_1 < 0$, $a_2 \leqslant \frac{1}{2}\partial f/\partial z \leqslant a_1$, причём $a_i^2 + b_j < 0$, или несколько более слабые условия (2. 1)).

Класс этих уравнений обнимает линейные неоднородные дифференциальные урувнения $x'' + 2a(t)x' + b(t)x = g(t)$ где $g = g(t)$ функция ограниченная.

Ввиду возможности одновременного выступания резонансов двух видов, полученные результаты несколько слабее, чем в случае уравнений, в которых $N = 0$. Простые примеры показывают, что при предпосылках этой работы тезисы моей работы „О резонансе второго вида" (натример $\mathrm{B1}^{\mathrm{bis}}$) будут в общем случае ложны.