ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XIII, 2 SECTIO A 1959

Z Zakładu Matematyki II Wydz. Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr Adam Bielecki

JAN KISYŃSKI

Remarque sur l'existence des solutions en large de l'équation $$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Uwaga o globalnym istnieniu rozwiązań równania $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$

Замечание о существовании решений в целом уравниения $$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Admettons l'hypothèse suivante:

Hypothèse (A). *Nous supposons que la fonction $g(x)$ est continue dan l'intervalle $\langle 0, a\rangle$, où $a > 0$, la fonction $h(y)$ est continue dans l'intervalle $\langle 0, b\rangle$, où $b > 0$, et qu'il existe un $a' \epsilon \langle 0, a\rangle$ et un $b' \epsilon \langle 0, b\rangle$ tels que la fonction $g(x)$ décroisse de b' à zéro dans l'intervalle $\langle 0, a'\rangle$ et soit constamment nulle dans l'intervalle $\langle a', a\rangle$, la fonction $h(y)$ soit constamment nulle dans l'intervalle $\langle b', b\rangle$ et que dans intervalle $\langle 0, b'\rangle$ elle soit la fonction inverse de la fonction $g(x)$ dans l'intervalle $\langle 0, a'\rangle$.*

Nous désignons par $\mathcal{C}$ l'ensemble des points (x, y) tels que $y = g(x)$, $x \epsilon \langle 0, a\rangle$ ou bien $x = h(y)$, $y \epsilon \langle 0, b\rangle$, et par Δ l'ensemble des points (x, y) tels que $h(y) \leqslant x \leqslant a$ et $g(x) \leqslant y \leqslant b$.

Nous admettons, en plus, que la fonction $\sigma(x)$ est de classe $C^{(1)}$ dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$ et la fonction $\tau(y)$ est de classe $C^{(1)}$ dans l'intervalle $\langle 0, b\rangle$.

Enfin, nous supposons la fonction $f(x, y, z, p, q)$ continue pour $(x, y) \epsilon \Delta$ et z, p, q arbitraires.

Ceci posé, nous pouvons formuler pour l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left((x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \tag{1}$$

le problème suivant, qui comprend, comme cas particuliers, les problèmes de Cauchy et de Darboux([1]).

Problème (C-D). *On demande s'il existe une fonction $z(x, y)$ qui soit continue, ainsi que ses dérivées $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ et $\partial^2 z/\partial x\partial y$, dans tout l'ensemble Δ, et qui vérifie dans cet ensemble l'équation* (1) *et les conditions*

$$z(x, y) = \sigma(x) + \tau(y) \quad \textit{lorsque} \quad (x, y) \in \mathcal{C}, \tag{2}$$

$$\partial z(x, y)/\partial x = \sigma'(x) \quad \textit{lorsque} \quad y = g(x), x \in \langle 0, a \rangle, \tag{3}$$

$$\partial z(x, y)/\partial y = \tau'(y) \quad \textit{lorsque} \quad x = h(y), y \in \langle 0, b \rangle. \tag{4}$$

Le but de cette note est d'établir une condition suffisante pour que le problème (C-D) admette une telle solution en large. Comme nous le verrons, l'ordre de grandeur du module de la fonction $f(x, y, z, p, q)$, quand $|z|$, $|p|$ et $|q| \to \infty$, va jouer un role essentiel.

Comme l'ont montré P. Hartman et A. Wintner ([**4**], exemple 2, p. 841), la continuité seule de la fonction $f(x, y, z, p, q)$ n'assure même pas l'existence locale d'une solution du problème (C-D) dans le voisinage de la courbe $\mathcal{C}$. Pour assurer celle-ci, il est nécessaire de soumettre la régularité de la fonction $f(x, y, z, p, q)$ par rapport aux variables p et q à des hypothèses plus fortes que la continuité, telles que la condition de Lipschitz ou celle de M. A. Pliś, plus générale, que M[lle] Z. Szmydt a introduite dans les travaux [**7**] et [**8**]. N'entrant pas dans les détails sur ce sujet, nous admettrons l'hypothèse suivante:

Hypothèse (B). *En adoptant pour tout nombre a et $n > 0$ quelconque la notation*

$$[a]_n = \begin{cases} -n \text{ lorsque } a < -n \\ a \text{ lorsque } |a| \leqslant n \\ n \text{ lorsque } a > n \end{cases}$$

nous supposons qu'il existe, pour tout $m > 0$, un nombre $n > m$ tel que l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, [z]_n, \left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_n, \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_n\right) \tag{5}$$

admette une solution $z_n(x, y)$ continue, ainsi que ses derivees $\partial z_n/\partial x$, $\partial z_n/\partial y$ et $\partial^2 z_n/\partial x\partial y$, dans tout l'ensemble Δ, satisfaisant aux conditions (2), (3) *et* (4).

([1]) Pour ne pas prolonger et compliquer les raisonnements, nous nous bornerons à ces plus simples problèmes.

Il est visible que l'hypothèse (B) est satisfaite si le problème (C-D) admet une solution en large dans l'ensemble Δ et, d'autre part, il est évident que l'hypothèse (B) assure l'existence locale d'une solution du problème (C-D) dans le voisinage de la courbe $\mathcal{C}$. Cependant, pour l'existence d'une solution en large du problème (C-D) les hypothèses (A) et (B) ne suffisent pas. Nous pouvons pourtant démontrer le théorème suivant:

Théorème. *Si les hypothèses* (A) *et* (B) *sont remplies et si*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dr}{1+\Phi(r)} = +\infty, \tag{6}$$

où

$$\Phi(r) = \max_{(x,y)\subset\Delta,|z|,|p|,|q|\leqslant r} |f(x,y,z,p,q)| = \max_{(x,y)\in\Delta} |f(x,y,[z]_r,[p]_r,[q]_r)|,$$

le problème (C-D) *admet une solution en large dans l'ensemble* Δ.

Remarque. *On vérifie aisément que la condition* (6) *est équivalente à la condition*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dr}{\varepsilon+\Phi(r)} = +\infty,$$

où ε est un nombre positif arbitraire. Une condition analogue, comme l'a démontre A. Wintner [**10**], assure l'existence de solutions en large des équations différentielles ordinaires, cf. aussi [**2**], p. 61, problème 5.

Démonstration. Posons

$$K = \max_{0\leqslant x\leqslant a}|\sigma(x)| + \max_{0\leqslant x\leqslant a}|\sigma'(x)| + \max_{0\leqslant y\leqslant b}|\tau(y)| + \max_{0\leqslant y\leqslant b}|\tau'(y)|$$

et désignons par $R(t)$ l'intégrale de l'équation

$$\frac{dR}{dt} = \frac{4+a+b}{2}(1+\Phi(R))$$

issue du point $t=0$, $R=K$ et saturée à droite. Cette intégrale est une fonction croissante (la dérivée $R'(t)$ est donc non décroissante) et elle est définie dans tout l'intervalle $0\leqslant t<+\infty$, ce qui résulte immédiatement, a cause de (6), de la formule

$$\int_K^{R(t)} \frac{dr}{1+\Phi(r)} = \frac{4+a+b}{2}\cdot t. \tag{7}$$

Soit n un nombre quelcongue satisfaisant à l'inégalité

$$(8)\qquad n > m_0 = K + 2\cdot\frac{a+b+ab}{a+b+4}\cdot R'(a+b),$$

pour lequel le problème (C-D) relatif à l'équation (5) admet une soluzion $z_n(x,y)$ en large dans l'ensemble Δ. Ce nombre existe en vertu de l'hypothèse (B). Posons

$$s_n(x,y) = \partial^2 z_n(x,y)/\partial x\partial y$$

Nous aurons alors

$$(9)\qquad z_n(x,y) = \sigma(x)+\tau(y)+\iint_{\Delta xy} s_n(u,v)\,du\,dv,$$

où

$$\Delta_{xy} = \{(u,v):(u,v)\in\Delta,\ u\leqslant x,\ v\leqslant y\},$$

$$(10)\qquad \frac{\partial z_n(x,y)}{\partial x} = \sigma'(x)+\int_{g(x)}^{y} s_n(x,v)\,dv$$

et

$$(11)\qquad \frac{\partial z_n(x,y)}{\partial y} = \tau'(y)+\int_{h(y)}^{x} s_n(u,y)\,du,$$

par suite

$$s_n(x,y) = f\Big(x,y,\Big[\sigma(x)+\tau(y)+\iint_{\Delta xy} s_n(u,v)\,du\,dv\Big]_n,\Big[\sigma'(x)+ + \int_{g(x)}^{y} s_n(x,v)\,dv\Big]_n,\Big[\tau'(y)+\int_{h(y)}^{x} s_n(u,y)\,du\Big]_n\Big),$$

donc

$$|s_n(x,y)|\leqslant \Phi\Big(\max\Big(\Big|\sigma(x)+\tau(y)+\iint_{\Delta xy} s_n(u,v)\,du\,dv\Big|,\Big|\sigma'(x)+ + \int_{g(x)}^{y} s_n(x,v)\,dv\Big|,\Big|\tau'(y)+\int_{h(y)}^{x} s_n(u,y)\,du\Big|\Big)\Big),$$

d'où

$$(12)\quad |s_n(x,y)|\leqslant \Phi\Big(K+\iint_{\Delta xy}|s_n(u,v)|\,du\,dv+\int_{g(x)}^{y}|s_n(x,v)|\,dv+\int_{h(y)}^{x}|s_n(u,y)|\,du\Big)$$

pour $(x,y)\in\Delta$. En particulier

$$(13)\qquad |s_n(x,y)|\leqslant \Phi(K)\ \text{pour}\ (x,y)\in\mathcal{C}.$$

Prolongeons la fonction $s_n(x, y)$ continûment sur le rectangle

$$D = \{(x, y): 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b\}$$

de telle façon que l'inégalité (13) soit vérifiée pour $(x, y)\in D-\Delta$. En tenant compte de (12) nous avons donc

$$(14)\qquad |s_n(x, y)| \leqslant \Phi\Big(K+\int_0^x\int_0^y |s_n(u, v)|\,du\,dv+\int_0^y |s_n(x, v)|\,dv+\int_0^x |s_n(u, y)|\,du\Big)$$

pour $(x, y)\in D$.

Posons maitenant

$$r_n(t) = \max_{(x,y)\in\Delta, x+y\leqslant t} |s_n(x, y)| \text{ pour } t\in\langle 0, +\infty).$$

La fonction $r_n(t)$ est continue, non négative est non décroissante et on a

$$(15)\qquad |s_n(x, y)| \leqslant r_n(x+y) \text{ pour } (x, y)\in D;$$

pour $(x, y)\in D$ tels que $x+y\leqslant t$ nous avons donc

$$\int_0^y |s_n(x, v)|\,dv \leqslant \int_0^y r_n(x+v)\,dv \leqslant \int_0^t r_n(\tau)\,d\tau,$$

$$\int_0^x |s_n(u, y)|\,du \leqslant \int_0^x r_n(u+y)\,du \leqslant \int_0^t r_n(\tau)\,d\tau$$

et

$$\int_0^x\int_0^y |s_n(u, v)|\,du\,dv \leqslant \int_0^x\int_0^y r_n(u+v)\,du\,dv \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^x\int_0^y \frac{1}{2}(r_n(x+v)+r_n(u+y))\,du\,dv \leqslant \frac{1}{2}(a+b)\int_0^t r_n(\tau)\,d\tau,$$

d'où l'on tire, en tenant compte de (14),

$$|s_n(x, y)| \leqslant \Phi\Big(K+\frac{1}{2}(4+a+b)\int_0^t r_n(\tau)\,d\tau\Big) \text{ pour } (x, y)\in D,\quad x+y\leqslant t, \text{ et,}$$

par conséquent,

$$(16)\qquad r_n(t) \leqslant \Phi\Big(K+\frac{1}{2}(4+a+b)\cdot\int_0^t r_n(\tau)\,d\tau\Big) \quad \text{pour} \quad t\in\langle 0+\infty).$$

En posant

$$R_n(t) = K+\frac{1}{2}(4+a+b)\int_0^t r_n(\tau)\,d\tau$$

nous aurons, d'après (16), $R'(t)/[1+\Phi(R_n(t))] \leqslant \frac{1}{2}(4+a+b)$, donc, en tenant compte de (7),

$$\int\limits_K^{R_n(t)} \frac{dr}{1+\Phi(r)} = \int\limits_0^t \frac{R_n'(\tau)}{1+\Phi\big(R_n(\tau)\big)}\, d\tau \leqslant \frac{4+a+b}{2}\cdot t = \int\limits_K^{R(t)} \frac{dr}{1+\Phi(r)}.$$

Il en résulte que $R_n(t) \leqslant R(t)$ pour $t \in \langle 0, +\infty)$, donc

$r_n(t) \leqslant \Phi\big(R_n(t)\big) \leqslant \Phi\big(R(t)\big) < 2R'(t)/(4+a+b)$ pour $t \in \langle 0, +\infty)$, d'où, en vertu de (15),

(17) $$|s_n(x, y)| \leqslant 2R'(a+b)/(4+a+b) \text{ pour } (x, y) \in \Delta.$$

Des formules (9), (10), (11), (17) et (8) on déduit $|z(x, y)| \leqslant m_0$,

$$|\partial z_n(x, y)/\partial x| \leqslant m_0 \text{ et } |\partial z_0(x, y)/\partial y| \leqslant m_0 \text{ pour } (x, y) \in \Delta,$$

donc

$$[z_n(x, y)]_n = z_n(x, y), \left[\frac{\partial z_n(x, y)}{\partial x}\right]_n = \frac{\partial z_n(x, y)}{\partial x} \text{ et } \left[\frac{\partial z_n(x, y)}{\partial y}\right] = \frac{\partial z_n(x, y)}{\partial y}$$

pour $(x, y) \in \Delta$; par conséquent $z_n(x, y)$ est une solution en large dans l'ensemble Δ du problème (C-D) pour l'équation (1). Le théorème se trouve ainsi démontré.

La condition (6), qui intervient dans ce théorème, est remplie, par exemple, s'il existe des constantes $M > 0$ est $N > 0$ telles que $|f(x, y, z, p, q)| \leqslant M + N\cdot(|z|+|p|+|q|)$ pour $(x, y) \in \Delta$ et z, p, q quelconques (cf. [**1**], [**5**], [**6**] et [**9**]). En particulier, ceci a lieu lorsque la fonction $f(x, y, z, p, q)$ est uniformément continue par rapport aux variables z, p, q dans l'ensemble $(x, y) \in \Delta$, z, p, q quelconques. Dans ce cas on a $\Phi(r) \leqslant M + N^*\cdot r$, $N^* = 3N$.

La condition (6) est aussi remplie si

$$\Phi(r) \leqslant M + N\cdot r\cdot \log(1+r)$$

ou

$$\Phi(r) \leqslant M + N\cdot r\cdot \log(1+r)\cdot \log(1+\log(1+r)),$$

ou bien

$$\Phi(r) \leqslant M + N\cdot r\cdot \log(1+r)\cdot \log\big(1+\log(1+r)\big)\cdot \log\big(1+\log(1+\log(1+r))\big)$$

et aussi de suite.

Les exemples suivants montrent que, dans notre théorème, l'hypothèse (6) joue un rôle essentiel.

Exemple 1. Considérons l'équation

$$\partial^2 z/\partial x\partial y = |\partial z/\partial y|^a, \quad a > 1$$

et déterminons la solution de cette équation qui satisfait aux conditions (problème de Darboux)

$$z(x, 0) = 0 \text{ pour } x \in \langle 0, 1\rangle,$$

$$z(0, y) = [(a-1)c]^{1/(1-a)} \cdot y \text{ pour } y \in \langle 0, 1\rangle, \text{ où } 0 < c < 1.$$

Un calcul élémentaire montre que cette solution est unique et qu'elle s'exprime par la formule

$$z(x, y) = [(a-1)(c-x)]^{1/(1-a)} \cdot y,$$

elle n'est donc définie que dans le rectangle $0 \leqslant x < c$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ et ne peut être problongée sur le carrée $0 \leqslant x, y \leqslant 1$.

Exemple 2. Considérons l'équation (²)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{2}{a-1}\left(c + \frac{2}{a-1}xy\right)\cdot|z|^a, \quad a > 1, 0 < c < 1.$$

Une solution de cette équation, satisfaisant aux conditions

$$z(x, 0) = z(0, y) = c^{2/(1-a)}$$

est la fonction

$$z(x, y) = (c - xy)^{2/(1-a)},$$

qui ne peut être prolongée d'une manière continue au-delà de la branche d'hyperbole $xy = c$, $x > 0$. Ctte solution est unique dans l'ensemble $0 \leqslant x, y \leqslant 1$, $xy < c$, car, dans chacun des ensembles $0 \leqslant x, y \leqslant 1$, $xy \leqslant d < c$ elle vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{2}{a-1}\left(c + \frac{2}{a-1}yx\right)\cdot|[z]_n|^a, \quad n = (c-d)^{2/1-a},$$

qui admet une seule solution, puisque son second membre est continu pour $0 \leqslant x, y \leqslant 1$, z arbitraire, et vérifie la condition de Lipschitz par rapport à z avec une constante universelle (cf. [**3**], p. 317).

Dans les deux exemples ci-dessus, les hypothèses (A) et (B) sont remplies (cf. [**3**], p. 317), tandis que la condition (6) n'est satisfaite dans aucun d'eux, ce qui résulte de la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} x^{-a}dx$ pour $a > 1$.

(²) Un exemple semblable pour le probleme de Cauchy a été donné dans le travail [**5**], p. 102.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ciliberto, C., *Sul problema di Darboux per l'equazione* $s = f(x, y, z, p, q)$, Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli, Serie 4, **22** (1955), p. 1–5.

[2] Coddington, E. A. and Levinson, N., *Theory of ordinary differential equations*, New York – Toronto – London (1955).

[3] Courant, R. und Hilbert, D., *Methoden der mathematischen Physik*, II Bd., Berlin (1937).

[4] Hartman, P. and Wintner, A., *On hyperbolic partial differential equations*, Amer. J. Math., **74** (1952), p. 832–864.

[5] Kisyński, J., *Sur l'existence et l'unicité des solutions des problèmes classiques relatifs à l'équation* $s = F(x, y, z, p, q)$, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **11** (1957), p. 73–112.

[6] — — *Sur l'existence des solutions d'un problème de M^lle Z. Szmydt relatif à l'équation* $\partial^2 z/\partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y)$, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **12** (1958), p. 67–109.

[7] Szmydt, Z., *Sur un nouveau type des problèmes pour un système d'équations différentielles hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **4**, 2 (1956), p. 67–72.

[8] — — *Sur l'existence de solutions de certains nouveaux problèmes pour un système d'équations différentielles hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes*, Annales Polonici Mathematici, **4**, 1 (1957), p. 40–60.

[9] — — *L'existence de solutions de certains problèmes aux limites relatifs à un système d'équations différentielles hyperboliques*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **6**, 1 (1958), p. 31–36.

[10] Wintner, A., *The non-local existence problem of ordinary differential equations*, Amer. J. Math., **66** (1945), p. 277—284.

Streszczenie

Podany przez A. Wintnera [**10**] warunek dostateczny dla nielokalnego istnienia rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych postaci $y' = f(x, y)$, polegający na ograniczeniu szybkości wzrostu prawej strony równania przy nieograniczonym wzroście wartości bezwzględnej zmiennej y, został w niniejszej pracy przeniesiony na równanie cząstkowe rzędu drugiego typu hiperbolicznego o dwu zmiennych niezależnych.

Резюме

Данное А. Винтнером [**10**] достаточное условие существования неместных решений обыкновенных дифференциальных уравнений вида $y' = f(x, y)$, состоящее в ограниченности быстроты возрастания правой стороны уравнения при неограниченном возрастании абсолютной величины переменной y, перенесено в предлагаемой работе на уравнения с частными производными второго порядка гиперболического типа с двумя независимыми переменными.