ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. X, 11 SECTIO A 1956

Z Zakładu Matematyki I Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr Mieczysław Biernacki

MIECZYSŁAW BIERNACKI

Sur les moyennes et les extréma des modules des fonctions analytiques

O średnich i ekstremach modułów funkcji analitycznych

О средних значениях и экстремумах модулей аналитических функций

§ 1. Cet article est consacré à des sujets assez divers: au § 2 j'étudie, en complétant un travail antérieur ([2], cf. aussi [5]), la monotonie de certaines expressions formées à l'aide des moyennes des modules le long de circonférences, au § 3 je donne une borne inférieure de $|f''(z)|$ aux points où $|f(z)|$ atteint son maximum sur la circonférence $|z|=r$.

§ 2. Théorème 1. *Si $f(z)$ est holomorphe et non constante dans le cercle $|z|<R$ et si, M et m désignant la borne supérieure, respectivement inférieure de $|f(z)|$ dans ce cercle, on a*

$$\frac{M}{m}<\lambda^{\frac{2}{\lambda-1}} \qquad (\lambda>1),$$

le quotient

$$\frac{\int\limits_0^{2\pi}|f(re^{i\Theta})|^{\lambda}\,d\Theta}{\int\limits_0^{2\pi}|f(re^{i\Theta})|\,d\Theta} \tag{1}$$

est une fonction croissante de r pour $0<r<R$.

Démonstration. Nous utiliserons la formule établie par D. C. Spencer [7] et par moi-même [1]: si $\lambda>0$ et $f(z)$ est holomorphe dans le cercle $|z|\leqq r$, on a:

$$\frac{d}{dr}\int\limits_0^{2\pi}|f(re^{i\Theta})|^{\lambda}\,d\Theta=\frac{\lambda^2}{r}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{M(r,\varphi)}n_r(u,\varphi)\,u^{\lambda-1}\,du, \tag{2}$$

$M(r,\varphi)$ est ici le maximum de $|f(z)|$ lorsque $|z|=r$ et $\arg f(z)=\varphi$, tandis que $n_r(u,\varphi)$ est le nombre des racines de l'équation $f(z)=ue^{i\varphi}$ qui sont contenues dans le cercle $|z|\leq r$.

Posons

$$p(u,r)=p(u)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n_r(u,\varphi)\,d\varphi, \tag{3}$$

alors la formule (2) pourra s'écrire

$$r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\Theta})|^{\lambda}\,d\Theta\right]=\lambda^2\int_m^M p(u)\,u^{\lambda-1}\,du, \tag{4}$$

où m et M désignent le minimum et le maximum de $|f(z)|$ dans le cercle $|z|\leq r$.

Si le quotient (1) n'était pas croissant pour une valeur de r on aurait, d'après (4), pour cette valeur de r:

$$\frac{\dfrac{d}{dr}\displaystyle\int_0^{2\pi}|f(re^{i\Theta})|^{\lambda}\,d\Theta}{\dfrac{d}{dr}\displaystyle\int_0^{2\pi}|f(re^{i\Theta})|\,d\Theta}=\frac{\lambda^2\displaystyle\int_m^M p(u)\,u^{\lambda-1}\,du}{\displaystyle\int_m^M p(u)\,du}<\frac{\displaystyle\int_0^{2\pi}|f(re^{i\Theta})|^{\lambda}\,d\Theta}{\displaystyle\int_0^{2\pi}|f(re^{i\Theta})|\,d\Theta}.$$

En appliquant le théorème de la moyenne au quotients des intégrales on déduit de la dernière inégalité la suivante:

$$\lambda^2 m^{\lambda-1}<M^{\lambda-1},$$

en contradiction avec l'inégalité de l'énoncé. On voit aisément que l'expression

$$\lambda^{\frac{2}{\lambda-1}}$$

est une fonction décroissante de $\lambda>1$, qui tend vers e^2 lorsque $\lambda\to 1$ et vers 1 lorsque $\lambda\to+\infty$.

Remarques. 1. Si, au lieu du quotient (1), on considère le quotient

$$\frac{\left[\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}|f(re^{i\Theta})|^{\lambda}\,d\Theta\right]^{1/\lambda}}{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}|f(re^{i\Theta})|\,d\Theta}, \tag{*}$$

alors, pour λ assez grand et pour certaines valeurs de r, ce quotient peut être une fonction décroissante de r. Il suffit de poser, par exemple,

$f(z)=a_0+a_1z$, où $a_0>0$ et $a_1>0$, et de remarquer que lorsque $\lambda\to\infty$, le quotient (*) tend vers

$$\frac{a_0+a_1 r}{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|a_0+a_1 z|\,d\Theta},$$

quantité égale à 1 pour $r=0$ et qui tend vers 1 lorsque $r\to\infty$.

2. Si $\lambda=2$ et si nous remplaçons $f(z)$ par $f'(z)$, le théorème I a une signification géométrique simple. Désignons, en effet, par $S(r)$ l'aire de la surface de Riemann décrite par $f(z)$ lorsque z décrit de cercle $|z|\leqq r$ et par $L(r)$ la longueur de l'image de la circonférence $|z|=r$; d'après le théorème I *si le rapport des bornes supérieure et inférieure de $|f'(z)|$ dans le cercle $|z|<R$ est inférieur à 4, le rapport*

$$\frac{S'(r)}{L(r)}$$

est une fonction croissante de r *). On peut rapprocher cette propriété de la proposition suivante de P. Turan [8]: si $f(z)$ est holomorphe dans le cercle $|z|\leqq 1$, il existe un r_0 $(0<r_0<1)$ tel que

$$\frac{S(r_0)}{L(r_0)}\geqslant\frac{|f'(0)|}{2\sqrt{e}}.$$

Voici une application du théorème I. Considérons les fonctions de la classe S:

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots$$

holomorphes et univalentes dans le cercle $|z|<1$. On sait que lorsque $|z|\leqq r<1$, on a:

$$\frac{r}{(1+r)^2}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{r}{(1-r)^2},\quad \frac{1-r}{(1+r)^3}\leqslant|f'(z)|\leqslant\frac{1+r}{(1-r)^3}.$$

En appliquant le théorème I aux fonctions $f(z)/z$ et $f'(z)$, on obtient la proposition suivante:

Si $f(z)$ appartient à la classe S et si r est inférieur à

$$\frac{\lambda^{\frac{1}{\lambda-1}}-1}{\lambda^{\frac{1}{\lambda-1}}+1},\ (\lambda>1),$$

*) D'après la théorème I il faut supposer dans cet énoncé que $f(z)$ n'est pas linéaire.

l'expression

$$\frac{\int_0^{2\pi} |f(re^{i\Theta})|^\lambda \, d\Theta}{\int_0^{2\pi} |f(re^{i\Theta})| \, d\Theta}$$

croît avec r. Si r est inférieur à

$$\frac{\lambda^{\frac{1}{2(\lambda-1)}} - 1}{\lambda^{\frac{1}{2(\lambda-1)}} + 1},$$

c'est l'expression

$$\frac{\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\Theta})|^\lambda \, d\Theta}{\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\Theta})| \, d\Theta}$$

qui croît avec r.

Des deux expressions en λ que nous avons obtenues et qui décroissent avec λ, la première est supérieure à la seconde; par exemple, pour $\lambda = 2$, la première est égale à 1/3, et la seconde, qui limite alors les valeurs de r pour lesquelles le quotient $S'(r)/L(r)$ croît, est égale à

$$(\sqrt{2} - 1)/(\sqrt{2} + 1) = 0{,}171 \ldots$$

Théorème II. *Supposons que $f(z)$ est holomorphe et non constante dans le cercle $|z| < R$ et désignons par M et m les bornes supérieure resp. inférieure de $|f(z)|$ dans ce cercle. q, λ, μ étant des nombres positifs plus grands que 1, supposons que l'on ait*

$$\frac{M}{m} < q^{\frac{1}{\lambda + \mu - 2}}.$$

Dans ces conditions le rapport

$$(*) \qquad \frac{\left[r \frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\Theta})|^\mu \, d\Theta \right]^q}{r \frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\Theta})|^\lambda \, d\Theta}$$

est une fonction croissante de r pour $0 < r < R$.

Démonstration. Remarquons d'abord que la fonction $p(u, r)$ définie par la formule (3) est dérivable par rapport à r. En effet, d'après une formule due à H. Cartan, [6] p. 179, on a

$$p(r, u) = \frac{d\,T\left(r, \dfrac{f(z)}{u}\right)}{d\log r}$$

où T désigne la caractéristique bien connue de R. Nevanlinna

$$T(r, f(z)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\Theta})|\, d\Theta$$

($\mathrm{Log}^+ u = \log u$ si $u \geqslant 1$, $\log^+ u = 0$ si $u < 1$). De cette expression de T on déduit aisément que $T(r, f)$ est deux fois dérivable par rapport à r. D'après (3), la dérivée $p_r(r, u)$ est non négative.

Remarquons ensuite que si $r < R$, on a $p(r, m) = 0$ et $p(r, M) = 0$. En différentiant le quotient (*) de l'énoncé on trouve, en tenant compte de la formule (4), que ce quotient croît avec r pourvu que l'on ait:

$$q\int_m^M p(r,u)\,u^{\lambda-1}\,du \cdot \int_m^M p_r(r,u)\,u^{\mu-1}\,du > \int_m^M p(r,u)\,u^{\mu-1}\,du \cdot \int_m^M p_r(r,u)\,u^{\lambda-1}\,du.$$

En remplaçant dans le premier membre de l'inégalité u par m et dans le second u par M, on voit que l'inégalité sera assurée si l'on a

$$qm^{\lambda-\mu-2} > M^{\lambda+\mu-2},$$

d'où l'on déduit immédiatement l'énoncé II.

On sait que l'aire de la surface de Riemann décrite par $f(z)$ lorsque z décrit le cercle $|z| \leqq r$ est égale à

$$\frac{1}{4}r\frac{d}{dr}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\Theta})|^2\, d\Theta,$$

donc le théorème II a la signification géométrique suivante: *sous les conditions précisées dans l'énoncé II, le rapport de la puissance q-ième de l'aire décrite par* $[f(z)]^{\mu^2}$ *à l'aire décrite par* $[f(z)]^{\lambda^2}$, *lorsque* z *décrit le cercle* $|z| \leqq r$ *croît avec* r.

§ 3. $M(r)$ désignant le maximum du module dans le cercle $|z| \leqq r$ d'une fonction $f(z)$ holomorphe dans ce cercle, W. K. Hayman a établi [4], sous certaines conditions, qu'au point z_0 de la circonférence $|z| = r$ où $|f(z_0)| = M(r)$ on a aussi $|f'(z)| = M'(r)$, si la dernière dérivée existe (les dérivées unilatérales existent toujours et $|f'(z_0)|$ est toujours égal à l'une d'elles). Ce résultat a été retrouvé et établi généralement par M. Biernacki et J. Krzyż dans leur travail [2]. Je me propose d'étudier les valeurs $|f''(z_0)|$. On obient la proposition suivante:

Théorème III. *$f(z)$ étant holomorphe dans le cercle $|z| \leqq r$ et z_0 étant le point de la circonférence $|z| = r$ où $|f(z_0)| = M(r)$, on a*

$$|f''(z_0)| \geqslant \frac{M'(r)}{r}\left(\frac{rM'(r)}{M(r)} - 1\right).$$

(Si $M'(r)$ n'existe pas, on doit remplacer dans cette inégalité $M'(r)$ par une dérivée unilatérale). L'égalité a lieu lorsque $f(z) = az^n$, où n est naturel.

Remarques 1. L'inégalité de l'énoncé ne présente de l'intérêt que si $rM'(r)/M(r) > 1$. Or, si $f(z)$ n'est pas bornée dans le cercle $|z| < R < \infty$, cela aura certainement lieu pour r assez proche de R, car autrement on voit en intégrant que $M(r)$ serait bornée. Si $f(z)$ est une fonction entière, on a aussi $rM'(r)/M(r) > 1$ pour r assez grand, à moins que $f(z)$ ne soit pas linéaire. Enfin, si $f(0) = 0$, on a $rM'(r)/M(r) > 1$ pour toute valeur de $r > 0$, car, d'après J. Hadamard, $rM'(r)/M(r)$ croît avec r, tandis que si $f(z) = a_p z^p + \ldots$, on a $\lim\limits_{z \to 0} zf'(z)/f(z) = p$.

2. Il est probable qu'il existe des théorèmes analogues relatifs aux dérivées d'ordre supérieur. En effet, d'après A. Wiman et G. Valiron ([3] et [9]), si $f(z)$ est entière ou holomorphe dans le cercle $|z| < R$ et assez rapidement croissante dans ce cercle, il existe une infinité de valeurs r_n qui tendent vers ∞. ou vers R respectivement lorsque $n \to \infty$ et telles que pour $r = r_n$ on a, aux points des circonférences $|z| = r$ où $f(z)$ atteint le maximum $M(r)$ de son module:

$$\frac{z^k f^{(k)}(z)}{f(z)} \sim |N(r)|^k \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

où $N(r)$ désigne l'indice du terme de plus grand module dans le développement taylorien de $f(z)$. En posant $k = 1$ on voit que $N(r)$ est asymptotiquement égal à $rM'(r)/M(r)$.

Démonstration. Supposons que $f(z)$ atteint le maximum $M(r)$ de son module au point z_0. Lorsque z décrit la circonférence $|z| = r$, l'expression

$$\varphi(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$$

décrit une circonférence C de rayon $r|f'(z_0)|$ tangente au point P d'affixe $f(z_0)$ au cercle $|w| = |f(z_0)| = M(r)$, car on sait que $z_0 f'(z_0)/f(z_0)$ est positif.

Puisque $rM'(r)/M(r) > 1$ et $|f'(z_0)| = M'(r)$ C contient la circonférence $|w| = M(r)$ dans son intérieur (sauf le point $f(z_0)$). Supposons que l'on ait, contrairement à l'énoncé,

$$|f''(z_0)| < \frac{|f'(z_0)|}{r}\left(\frac{r\,|f'(z_0)|}{|f(z_0)|} - 1\right),$$

inégalité qui peut s'écrire

$$(5) \qquad \frac{|z-z_0|^2}{2!}|f''(z_0)| < |z-z_0|^2\,|f'(z_0)|^2\left(\frac{1}{2\,|f(z_0)|} - \frac{1}{2r\,|f'(z_0)|}\right).$$

Considérons une valeur de z, de module r, voisine de z_0 et soit P' le point $\varphi(z)$ sur la circonférence C. En vertu de la formule bien connue de géométrie différentielle, d'après laquelle la moitié de la courbure d'une courbe en un point P est la limite du quotient de la distance $P'Q$ d'un point P' de la courbe à la tangente en P par $(PP')^2$ lorsque $P' \to P$, la partie principale du second membre de l'inégalité (5) représente, lorsque $P' \to P$, la différence entre les distances de la tangente à la circonférence C en P au point P'' du cercle $|w| = |f(z_0)|$ tel que $PP'' = PP'$ et au point P' lui-même, ou encore la distance entre le point P' et le cercle $|w| = |f(z_0)|$. D'après la formule (5) et la formule de Taylor

$$f(z) = \varphi(z) + \frac{(z-z_0)^2 f''(z_0)}{2!} + \dots,$$

si z était suffisamment voisin de z_0, le point $f(z)$ serait en dehors du cercle $|w| = |f(z_0)|$, ce qui est en contradiction avec la définition du point z_0.

En s'appuyant sur le théorème précédent on obtient facilement la proposition suivante:

Théorème IV. *Considérons une fonction $f(z)$ holomorphe dans le cer- $|z| \leqq r$, telle que $f(0) = 0$ et supposons que z_0 soit le point de la circonférence $|z| = r$ où $|f(z)|$ atteint son maximum. La courbe C: $|f'(z)| = |f'(z_0)|$ n'a pas de point multiple $z = z_0$ et n'est jamais tangente en ce point à la demi-droite* $\arg z = \arg z_0$.

Démonstration. D'après le théorème III $f''(z_0) \neq 0$, donc le point z_0 n'est pas un point multiple ni un point de rebroussement de C. Supposons que C soit tangente à la demi-droite $\arg z = \arg z_0$; en vertu des relations de Cauchy-Riemann on aurait, en posant $z = re^{i\Theta}$ au point z_0: $\partial \arg f'(z)/\partial\Theta = 0$. Posons $\psi(z) = f(z)/z$; $\psi(z)$ est une fonction holomorphe dans le cercle $|z| \leq r$ qui y atteint le maximum de son module au point z_0. On a

$$(*) \qquad \frac{z\psi'}{\psi} = \frac{f'}{\psi} - 1$$

et $z_0\psi'(z_0)/\psi(z_0) > 0$. Lorsque Θ croît et que le point $re^{i\Theta}$ décrit un petit arc de $|z| = r$ contenant z_0, $\arg z\psi'(z)/\psi(z)$, c'est-à-dire l'angle de la tangente à la courbe décrite par $\psi(z)$ avec le rayon vecteur $0\psi(z)$ croît visiblement, de même que $\arg\psi(z)$. Puisque

$$\frac{\partial \arg f'(z)}{\partial \Theta} = 0,$$

l'argument de $f'(z)/\psi(z)$ décroît, au contraire, dans les mêmes conditions et nous obtenons ainsi une contradiction avec l'égalité $(*)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Biernacki M., *Sur les moyennes de module des fonctions holomorphes*. Annales UMCS (A), **1** (1946).

[2] Biernacki M. and Krzyż J., *On the monotonity of certain functionals in the theory of analytic functions*. Annales UMCS (A), **9** (1955).

[3] Bloch A., *Les fonctions holomorphes et méromorphes dans le cercle unité*. Mém. Sc. Mat. **20**, Paris, Gauthier-Villars 1925.

[4] Hayman W. K., *A characterization of the maximal modulus of functions regular at the origin*. Journ. d'Analyse Math. **1** (1951), p. 135—154.

[5] Julia G., *Principes géométriques d'Analyse*. Paris, Gauthier-Villars. Cahiers scient. Fasc. VI (1930) et XI (1932).

[6] Nevanlinna R., *Eindeutige analytische Funktionen*. Berlin, J. Springer. (1953).

[7] Spencer D. C., Journal London Math. Society **15** (1940).

[8] Turan P., *Über den Blochschen Satz* (Grünwald Gézával). Acta Litt. Ac. Scient. Szeged **8** (1937), p. 236—240.

[9] Valiron G., *Fonctions entières et fonctions méromorphes d'une variable*. Mém. Sc. Math. **2**, Paris, Gauthier-Villars 1925.

INSTUTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Streszczenie

W pracy tej dowodzę twierdzeń następujących:

I. Jeżeli $f(z)$ jest holomorficzna i różna od stałej w kole $|z|<R$ i jeśli kresy górny M i dolny m $|f(z)|$ w $|z|<R$ spełniają nierówność

$$\frac{M}{m}<\lambda^{\frac{2}{\lambda-1}} \qquad (\lambda>1),$$

to iloraz

$$\frac{\int_0^{2\pi}|f(re^{i\Theta})|^\lambda\,d\Theta}{\int_0^{2\pi}|f(re^{i\Theta})\,d\Theta}$$

jest funkcją rosnącą r gdy $0<r<R$.

II. Załóżmy, że różna od stałej funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w kole $|z|<R$ i że q, λ, μ są liczbami dodatnimi większymi od 1 a M i m mają to samo znaczenie co w twierdzeniu I. Jeśli

$$\frac{M}{m}<q^{\frac{1}{\lambda+\mu-2}}$$

to stosunek

$$\frac{\left[r\frac{d}{dr}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\Theta})|^\mu\,d\Theta\right]^q}{r\frac{d}{dr}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\Theta})|^\lambda\,d\Theta}$$

jest funkcją rosnącą r gdy $0<r<R$.

III. Jest $f(z)$ jest holomorficzna w kole $|z|\leqslant r$ a z_0 jest tym punktem okręgu $|z|=r$, w którym $|f(z)|$ przybiera wartość maksymalną $M(r)$, to jest

$$|f''(z_0)|\geqslant\frac{M'(r)}{r}\left|\frac{rM'(r)}{M(r)}-1\right|.$$

Znak $=$ ma miejsce gdy $f(z)=az^n$, przy czym n jest naturalne.

IV. Jeśli $f(z)$ jest holomorficzna w kole $|z|\leqslant r$, $f(0)=0$, a z_0 ma znaczenie z twierdzenia III, to krzywa C: $|f'(z)|=|f'(z_0)|$ nie ma w z_0 punktu wielokrotnego i nie jest w tym punkcie styczna do półprostej $\arg z=\arg z_0$.

Резюме

В этой работе я доказываю следующие теоремы:

I. Если $f(z)$ голоморфна и $\neq$ const. в круге $|z|<R$ и если пределы $|f(z)|$ верхний M и нижний m в круге $|z|<R$ исполняют неравенство

$$\frac{M}{m}<\lambda^{\frac{2}{\lambda-1}}\,(\lambda>1)$$

то отношение

$$\frac{\int\limits_0^{2\pi}|f(re^{i\Theta})|^{\lambda}\,d\Theta}{\int\limits_0^{2\pi}|f(re^{i\Theta})|\,d\Theta}$$

есть строго возрастающая функция от r, $r\in(0,R)$.

II. Если, при обозначениях предыдущей теоремы, имеет место неравенство

$$\frac{M}{m}<q^{\frac{1}{\lambda+\mu-2}}$$

где q, λ и μ суть числа большие, чем 1, то

$$\frac{\left[r\dfrac{d}{dr}\int\limits_0^{2\pi}|f(re^{i\Theta})|^{\mu}\,d\Theta\right]^q}{r\dfrac{d}{dr}\int\limits_0^{2\pi}|f(re^{i\Theta})|^{\lambda}\,d\Theta}$$

растет вместе с r, $r\in(0,R)$.

III. Если $f(z)$ голоморфна в круге $|z|\leqslant r$, и если $M(r)$, то-есть максимум модуля $|f(z)|$ на $|z|=r$, достигается в точке z_0, то исполняется неравенство

$$|f''(z_0)|\geqslant\frac{M'(r)}{r}\left[\frac{r\,M'(r)}{M(r)}-1\right],$$

причём знак равенства имеет место, если $f(z)=az^n$, где n натуральное число.

IV. Если $f(z)$ голоморфна в круге $|z|\leqslant r$, $f(0)=0$ и если z_0 имеет значение из теоремы III, то кривая C, определённая уравнением $|f'(z)|=|f'(z_0)|$, имеет в z_0 обыкновенную точку, причём касательная к C в точке z_0 не может совпадать с прямой $\arg z=\arg z_0$.