

Z Zakładu Matematyki III, Wydz. Mat.-Fiz.-Chem. UMCS

Kierownik: doc. dr Krzysztof Tatarkiewicz

KRZYSZTOF TATARKIEWICZ

Une démonstration du théorème de Frink généralisé

Dowód uogólnionego twierdzenia Frinka

Доказательство обобщённой теоремы Фринка

Cette note est consacrée à une démonstration du Théorème 3,1 de mon travail *Sur les limites des coefficients des suites des polynômes généralisés*, ces Annales sec. A, vol. 6 (1952) p. 47—54¹⁾.

Théorème. Soit Z un système de l'espace C_δ . Soient $f \in C_\delta$ et une suite de polynômes généralisés

$$x_n = \sum_{i=1}^n a_i^n \cdot z_i$$

tels que pour un k déterminé

$$(1) \quad \delta(x_n - f) = o|\varepsilon_n(k)|.$$

Alors il existe la limite finie

$$(2) \quad a_k(f) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} a_k^n$$

qui ne dépend pas du choix de la suite $\{x_n\}$, (parmi celles qui vérifient la condition (1)).

Avant de procéder à la démonstration, nous allons démontrer deux lemmes.

¹⁾ La démonstration primitive contient une erreur (p. 50) qui fut relevée par M. Hureckij (Ref. Zurnal 1956, n° 493). On pourrait compléter cette démonstration sans grande difficulté, mais la démonstration présente étant plus simple, il ne nous semble pas utile de revenir à ces considérations.

Lemme 1. Si pour chaque suite extraite $\{\gamma_{l(n)}\}$ de la suite $\{\gamma_n\}$ on a

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\gamma_{l(n+1)} - \gamma_{l(n)}| = 0,$$

alors il existe la limite finie

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n.$$

Démonstration du Lemme 1. I. Supposons que la suite $\{\gamma_n\}$ n'a pas de limite (finie ou non). Alors il existe deux suites extraites $\{\gamma_{i(n)}\}$ et $\{\gamma_{j(n)}\}$ qui ont des limites différentes (finie ou non):

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{i(n)} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{j(n)}.$$

Posons $l(1) = 1$ et définissons $l(n)$ pour $n > 1$ par récurrence. Soit $l(2n)$ le premier élément de la suite $\{i(n)\}$ plus grand que $l(2n-1)$ et soit $l(2n+1)$ le premier élément de la suite $\{j(n)\}$ plus grand que $l(2n)$. Alors, vu (5) la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\gamma_{l(n+1)} - \gamma_{l(n)}|$$

n'existe pas ce qui est en contradiction avec (3).

II. Nous avons démontré que la limite (4) — finie ou non — existe. Nous allons démontrer qu'elle doit être finie. Supposons qu'elle ne soit pas finie; pour fixer les idées supposons par exemple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = +\infty.$$

Il s'ensuit que pour chaque n il existe un nombre $M(n) > n$ tel que

$$\gamma_{M(n)} > \gamma_n + 1.$$

C'est-à-dire que

$$(6) \quad \gamma_{M(n)} - \gamma_n > 1.$$

Posons $l(1) = 1$ et par récurrence $l(k+1) = M(l(k))$ pour $k = 1, 2, \dots$. Vu (6) on a

$$|\gamma_{l(n+1)} - \gamma_{l(n)}| > 1$$

ce qui est en contradiction avec (3). Donc la limite (4) est finie.

C. Q. F. D.

Lemme 2. Soit $y_n = x_{l(n)}$ une suite extraite de la suite $\{x_n\}$. Si $\{x_n\}$ vérifie la condition (1), alors la suite $\{y_n\}$ la vérifie aussi, c'est-à-dire que

$$\delta(y_n - f) = o[\varepsilon_n(k)].$$

Démonstration du Lemme 2. La suite $\{\varepsilon_n(k)\}$ est par définition non négative et non croissante. Vu $l(n) > n$, on a $\varepsilon_{l(n)}(k) \leq \varepsilon_n(k)$ pour chaque n .

Donc de

$$\delta(x_{l(n)} - f) = o[\varepsilon_{l(n)}(k)]$$

il s'ensuit que

$$\delta(x_{l(n)} - f) = o[\varepsilon_n(k)].$$

C. Q. F. D.

Démonstration du Théorème. I. ²⁾ Soit une suite extraite $\{a_k^{l(n)}\}$ de la suite $\{a_k^n\}$. Vu (1) du Lemme 2 il s'ensuit que

$$\delta(x_{l(n)} - f) = o[\varepsilon_n(k)] = \delta(x_{l(n+1)} - f)$$

Du Théorème 2,4 du travail cité il s'ensuit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_k^{l(n+1)} - a_k^{l(n)}| = 0.$$

Donc, vu le Lemme 1 la limite finie (2) existe.

II. Soit

$$y_n = \sum_{i=1}^n \beta_i^n \cdot z_i \quad \text{et} \quad \delta(y_n - f) = o[\varepsilon_n(k)].$$

Supposons que la suite $\{x_n\}$ vérifie la condition (1). En vertu du Théorème 2,4 du travail cité on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_k^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_k^n$$

et la valeur de la limite (2) ne dépend pas du choix de la suite $\{x_n\}$ ou de la suite $\{y_n\}$.

C. Q. F. D.

²⁾ Je remercie M. A. Alexiewicz pour une remarque qui m'a permis de rendre cette démonstration plus élégante.

Streszczenie

Podaję nowy dowód Twierdzenia 3,1 z mej pracy *O pewnych granicach ciągów współczynników uogólnionych wielomianów*, Ann. UMCS (A) 6 (1952) str. 53 i 54.

Резюме

Я даю новое доказательство теоремы 3,1 из моей работы „*O некоторых пределах последовательностей коэффициентов обобщенных полиномов*” Ann. UMCS (A) 6 (1952) стр. 54.