ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. IX, 12 SECTIO A 1955

Z Seminarium Matematycznego I Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr M. Biernacki

KONSTANTY RADZISZEWSKI et ZDZISŁAW LEWANDOWSKI

Sur le lieu géométrique des milieux des cordes qui divisent le périmètre d'un ovale dans le rapport k

O miejscu geometrycznym środków cięciw dzielących obwód owalu w stosunku k

О геометрическом месте средин хорд делящих периметр выпуклой фигуры в отношении k

1. M. Biernacki a posé le problème d'étudier les propriétés du lieu géométrique des milieux des cordes qui divisent le périmètre d'un ovale R dans le rapport k.

Dans ce travail nous étudions la convexité du lieu géométrique en question. On vérifie aisément que, dans le cas général, ce lieu n'est pas une courbe convexe. En effet, si l'on prend pour R un pentagone régulier et si l'on pose $k = 1$, le lieu géométrique cherché est une courbe étoilée.

2. Nous allons prouver que dans le cas d'un ovale possédant un centre de symétrie le lieu géométrique des milieux des cordes qui divisent le périmètre de l'ovale dans le rapport k est une courbe convexe. On peut supposer $k \neq 1$, car, dans le cas contraire, le lieu géométrique en question est le centre de symétrie de l'ovale, c'est-à-dire une figure convexe.

Nous établirons notre théorème d'abord pour les polygones, puis pour des ovales quelconques ayant un centre de symétrie. Pour cela nous aurons besoin du lemme suivant:

Lemme: *φ étant un angle ($\varphi < \pi$) de sommet S et MN une corde dont les extrémités sont situées sur la frontière de l'angle $\varphi = \sphericalangle MSN$ et telle que $MS + SN = const$, le lieu géométrique des milieux des cordes MN est un segment perpendiculaire à la bissectrice de l'angle φ.*

Démonstration: Soit φ un angle de sommet S et de côtés l_1, l_2 et soient M et N des points sur la frontière de l'angle qui satisfont à la condition $MS + SN = a$, où a est une constante et $M \in l_1$, $N \in l_2$. Désignons par A et B les points situés respectivement sur les côtés l_1 et l_2 et tels que $AS = SB = {}^a/_2$. Evidemment $AS + SB = a$ et le segment AB est perpendiculaire à la bissectrice de l'angle φ. Il est clair que les points M et N sont situés de part et d'autre de la droite AB. Désignons par O le point d'intersection du segment MN et du segment AB. Comme $MS + SN = a$ et $AS + SB = a$, on a $MS + SN - AS - SB = 0$, donc $AM = BN$. Par le point N menons une parallèle l à la droite l_1 et désignons par N' le point d'intersection des droites l et AB. On voit immédiatement que $\sphericalangle NBN' = \sphericalangle NN'B$, c'est-à-dire $NB = NN'$. Les triangles AMO et ONN' on un côté égal, car $AM = BN = NN'$; leurs angles étant respectivement égaux par construction ils sont donc égaux. On en déduit que $MO = ON$. Les milieux des cordes MN sont donc situés sur le segment AB et le lemme est ainsi établi.

Supposons maintenant que l'ovale W soit un polygone ayant un centre de symétrie. Admettons un système cartésien de coordonnées dont l'origine O est le centre de symétrie du polygone W. Ce système établit une orientation déterminée du plan, celle-ci fixant à son tour un sens de parcours déterminé sur le polygone W. En désignant par M_0 resp. M_0' les points d'intersection de W avec l'axe x (l'abscisse de M_0 étant positive, celle de M_0' négative), nous dirons que le point K du polygone précède le point L si l'angle orienté que fait le vecteur $\overrightarrow{OK}$ avec le sens positif de l'axe Ox est inférieur à celui que fait avec le même axe le vecteur $\overrightarrow{OL}$.

Soit MN une corde qui divise la périmètre de W dans le rapport $k < 1$. Dans la suite nous n'allons considérer que des cordes MN telles que le vecteur $\overrightarrow{ON}$ fasse avec le vecteur $\overrightarrow{OM}$ un angle α satisfaisant à l'inégalité $0 < \alpha < \pi$. Supposons que M soit situé sur le côté AB, N sur le côté CD du polygone W et que AB ne soit pas parallèle à CD. Désignons par φ l'angle compris entre les droites AB et CD, contenant dans son intérieur le point O. Menons la bissectrice de l'angle φ et choisissons sur elle un vecteur unitaire $\vec{a}$ dont le sens et la direction sont les mêmes que ceux du vecteur $\overrightarrow{PS}$, S étant le sommet de l'angle φ et P un point intérieur de W, appartenant à la bissectrice de l'angle φ. Nous nous bornerons à considérer les points M pour lesquels $y \geqslant 0$ et nous admettrons que M_0 est le premier élément de l'arc de la frontière de W situé dans le demi-plan $y \geqslant 0$ et que M_0' est le dernier.

Dans le cas où les points M et N sont sur un côté de W nous admettons que le vecteur $\vec{a}$ a même sens que le vecteur $\overrightarrow{OF}$, où F est le pied de la perpendiculaire abaissée du point O sur MN. Si $AB||CD$ et les segments AB et CD ne sont pas identiques, nous prenons comme sens du vecteur $\vec{a}$ le sens positif du côté du polygone W sur lequel se trouve le point M (c'est-à-dire le vecteur $\vec{a}$ est parallèle au côté en question et son sens est conforme à l'orientation positive que nous avons fixée sur la frontière du polygone W). Dans le cas où M ou bien N est un sommet de W nous admettons que M ou N appartient au côté qui est consécutif à ce sommet, d'après l'orientation choisie auparavant. Le vecteur $\vec{a}$ se trouve ainsi déterminé comme une fonction du point M pour tous les points de la frontière de W situés dans le demi-plan $y \geqslant 0$. Evidemment $\vec{a}(M_0) = -\vec{a}(M_0')$.

Nous supposons maintenant que le point M parcourt la frontière du polygone W dans le sens positif à partir du point M_0. Désignons par $\psi(M)$ l'angle que fait le vecteur $\vec{a}(M)$ avec le sens positif de l'axe Ox. On voit aisément que la fonction $\psi(M)$ est non décroissante en ce sens que, si M précède N, alors $\psi(M) \leqslant \psi(N)$. D'après le lemme que nous avons établi au début, les côtés du polygone Q qui est le lieu géométrique des milieux des cordes divisant le périmètre de W dans le rapport k sont perpendiculaires à certains vecteurs $\vec{a}(M)$. (Lorsque les extrémités M et N de la corde parcourent les segments des côtés de W, le milieu de cette corde parcourt un segment perpediculaire à la bissectrice de l'angle que font ces côtés, c'est-à-dire au vecteur $\vec{a}(M)$. Le lieu géométrique des milieux des cordes étant continu, ces segments perpendiculaires à $\vec{a}(M)$ formeront un polygone Q). Etablissons sur les côtés du polygone Q une orientation conforme à celle que nous avons introduit sur la frontière du polygone W. L'angle compris entre le côté du polygone Q ainsi orienté et le sens positif de l'axe Ox sera égal à $\chi(M) = \psi(M) + \pi/2$. Aussi longtemps que le milieu de la corde menée par le point M et divisant le périmètre de W dans le rapport k appartient au côté considéré du polygone Q, la fonction $\psi(M)$ est constante. La fonction $\chi(M)$ est donc une fonction non décroissante (dans le même sens que la fonction $\psi(M)$), Comme Q est un polygone fermé, il suffit, pour démontrer que Q est convexe, de prouver que $\chi(M) - \chi(M_0) = \psi(M) - \psi(M_0) \leqslant \pi$ lorsque M parcourt l'arc $\widehat{M_0 M_0'}$ pour $y \geqslant 0$. En effet, si le polygone Q n'était pas convexe, la ligne brisée qui forme la frontière de Q devrait se couper elle-même (car $\chi(M)$ est une fonction non décroissante), mais alors la fonction $\chi(M) - \chi(M_0)$ devrait avoir une valeur supérieure à π. Evidemment l'angle $\chi(M) - \chi(M_0) =$

$=\psi(M)-\psi(M_0)$ n'est autre que l'angle compris entre un côté donné orienté du polygone Q et un des côtés orientés suivants de Q et il est égal à l'angle compris entre les bissectrices correspondantes des angles, déterminées par la fonction $\psi(M)$. Nous allons prouver que, lorsque le point M parcourt la moitié de la frontière de W à partir de M_0, dans le sens positif, l'angle $\psi(M)-\psi(M_0)$ augmente de π au plus.

Lorsque le point M se confond avec le point M_0, désignons par N_0 la position du point N, extrémité de la corde MN divisant la frontière de W dans le rapport k, tel que N succède à M_0 dans le sens défini auparavant. Désignons par M_0' et N_0' les points symétriques de M_0 et N_0 par rapport à O. Supposons que M_0 et N_0 soient sur les côtés orientés $\overrightarrow{A_0B_0}$ et $\overrightarrow{C_0D_0}$, M_0' et N_0' sur $\overrightarrow{A_0'B_0'}$ et $\overrightarrow{C_0'D_0'}$. Prenons maintenant une corde quelconque MN (M précède N) divisant la frontière de W dans le rapport k et telle que M soit situé sur l'arc $\overset{\frown}{M_0N_0M_0'}$ de la frontière de l'ovale W. Les points M et N sont situés sur les côtés orientés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Evidemment $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ font avec le sens positif de l'axe Ox des angles qui ne sont pas supérieurs à ceux que forment avec cet axe respectivement $\overrightarrow{A_0'B_0'}$ et $\overrightarrow{C_0'D_0'}$. On en déduit aisément que le vecteur $\vec{a}(M)$ fera avec le sens positif de l'axe Ox un angle plus petit ou égal à $\pi+\psi(M_0)$, donc

$$\psi(M)-\psi(M_0)\leqslant\pi.$$

Si M parcourt toute la frontière du polygone W, l'angle $\psi(M)-\psi(M_0)=$ $=\chi(M)-\chi(M_0)$ augmentera de 2π exactement, car W a un centre de symétrie. Nous obtenons ainsi le résultat suivant:

Si W est un polygone ayant un centre de symétrie, le lieu géométrique des milieux des cordes divisant la frontière de W dans la rapport k est un polygone convexe ayant un centre de symétrie.

R étant maintenant un ovale quelconque ayant un centre de symétrie, inscrivons y une suite de polygones W_n, ayant un centre de symétrie et tels que $W_n \to R$. On voit aisément que la suite correspondante Q_n des polygones qui sont les lieux géométriques des milieux des cordes divisant la frontière de W dans le rapport k va tendre vers l'ovale Q, lieu géométrique des milieux des cordes divisant la frontière de R dans le rapport k. Nous obtenons ainsi le théorème:

Le lieu géométrique des milieux des cordes divisant le périmètre de l'ovale R, ayant un centre de symétrie, dans le rapport k est une courbe convexe fermée ayant un centre de symétrie.

Streszczenie

W pracy tej dowodzi się, że miejscem geometrycznym środków cięciw, dzielących w stosunku k obwód owalu płaskiego i posiadającego środek symetrii, jest krzywa wypukła. Istnieją owale, dla których własność ta nie zachodzi.

Резюме

В этой работе доказано, что геометрическое место средин хорд, делящих в отношении k площадь плоской выпуклой фигуры, имеющей центр симметри, есть выпуклая кривая. Существуют выпуклые фигуры, не обладающие этим свойством.