

Z Zakładu Matematyki II Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS

Kierownik: prof. dr A. Bielecki

ADAM BIELECKI

Sur l'indépendance des axiomes d'incidence, d'ordre et de congruence de Hilbert

O niezależności Hilbertowskich aksjomatów incydencji,
uporządkowania i kongruencji

O независимости аксиом принадлежности, порядка и конгруэнтности Гильберта

Le système d'axiomes de la géométrie euclidienne donné par D. Hilbert dans la première édition de ses célèbres *Fondements de la Géométrie*¹⁾ a été successivement modifié dans les éditions ultérieures, par suite des améliorations qu'y ont apportées de nombreux géomètres²⁾, toutefois sans que le problème de l'indépendance des axiomes eût été complètement élucidé.

Dans la septième édition [4], sur laquelle nous nous appuyons dans ce travail, on trouve la démonstration de l'indépendance de quelques uns des axiomes, les plus importants: l'axiome de parallélisme, les deux axiomes de continuité, ainsi que le dernier axiome de congruence (III₅). Le problème de l'indépendance des autres axiomes restait ouvert.

En tenant compte des caractères spécifiques de l'axiomatique de Hilbert on pose d'habitude le problème de l'indépendance sous la forme suivante: tel ou tel axiome est-il indépendant des autres axiomes du même groupe et de ceux des groupes précédents? Hilbert ayant lui-même tranché en principe la question de l'indépendance des axiomes des groupes

¹⁾ D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 1899.

²⁾ H. Poincaré, A. Wald, E. H. Moore, A. Rosenthal et d'autres.

IV et V³⁾), nous ne nous occuperons que de ceux des groupes I, II, III. Nous démontrerons que ces axiomes ne sont pas indépendants au sens défini plus haut. En supprimant ou en affaiblissant quelques uns des axiomes de Hilbert nous obtiendrons trois groupes réduits d'axiomes I*, II*, III*, tels que

1^o un axiome quelconque du groupe I* (incidence) ou II* (ordre) sera indépendant des autres axiomes des groupes I* et II*;

2^o un axiome quelconque du groupe III* sera indépendant des autres axiomes des groupes I*, II* et III*.

En particulier, dans le groupe III des axiomes de Hilbert l'axiome III₁, relatif aux sommes de segments⁴⁾, ainsi qu'une partie de l'axiome III₄, relatif à la réflexivité de la congruence des angles, sont superflus⁵⁾. Dans les groupes I et II les réductions seront beaucoup moins essentielles.

Avant d'aborder l'étude de l'indépendance nous allons décomposer les axiomes de Hilbert — là où une telle décomposition s'impose d'une façon naturelle — en phrases plus simples. C'est pourquoi nous allons un peu changer le numérotage à l'intérieur de chacun des groupes. Nous ne nous en tiendrons pas, non plus, à l'énoncé textuel des *Fondements de la Géométrie*. P. ex., dans l'énoncé de l'axiome de P a s c h, nous supprimerons la notion de segment, qui n'y est pas encore nécessaire.

Nous nous proposons, cependant, de nous garder, autant que possible, d'introduire des modifications changeant le sens géométrique des axiomes de Hilbert et des améliorations incompatibles avec le caractère général de son oeuvre. Nous ne cherchons non plus à acquérir le maximum de précision du point de vue de la logique formelle, ce qui exigerait, bien entendu, une réédition de toute la théorie⁶⁾.

³⁾ Nous ne discuterons pas ici les doutes que peut faire surgir le second axiome de continuité V₂ tel qu'il a été énoncé par Hilbert; on sait qu'il peut être remplacé par un autre, plus élémentaire.

⁴⁾ K. Väisälä [6] a montré que cet axiome peut être affaibli ou remplacé par l'hypothèse qu'un angle congruent à un angle droit est droit.

⁵⁾ Une note sur ce sujet a paru dans le Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences [1].

⁶⁾ L'étude de l'axiomatique de Hilbert faite par de nombreux auteurs concernait non seulement le problème de la réduction du nombre des axiomes mais celui de l'amélioration du système par l'introduction de nouvelles notions primitives, des modifications du contenu des axiomes etc. Je vais citer, à titre d'exemple, quelques travaux de Ugo Cassina [2] contenant l'examen critique de la septième édition des *Fondements de la Géométrie* et la démonstration de l'indépendance pour une variante du système d'axiomes de Hilbert; ceux-ci y ont subi des transfigurations assez essentielles, en particulier les axiomes de congruence.

Les démonstrations d'indépendance auront, comme toujours, un sens relatif, et seront faites dans l'hypothèse que la géométrie analytique de l'espace cartésien est une théorie non-contradictoire. En fin de compte, les preuves s'appuieront donc sur l'hypothèse que l'arithmétique des nombres réels et la théorie élémentaire des ensembles sont non-contradictories. Afin d'éviter de trop longs développements nous nous bornerons, pour les démonstrations plus faciles et présentant moins d'intérêt, à indiquer l'idée principale du raisonnement.

Après avoir terminé ce travail j'ai eu l'occasion de prendre connaissance d'une note très intéressante de M. R. Walker [7] qui y a résolu complètement, bien que d'une autre façon que moi, le problème de la réduction des axiomes d'incidence et d'ordre. De plus, il a démontré que les axiomes de congruence, dénotés ici par III_1^* — III_2^* (chap. 4), sont indépendants et a posé le problème (résolu dans les chapitres 5—7 de la présente note) de l'indépendance des deux axiomes restants de congruence de Hilbert, désignés ici par T_1 et T_2 .

1. Axiomes d'incidence.

Nous utiliserons les notations et les abréviations suivantes:

E_1, E_2, E_3	ensemble de points, ensemble de droites,
$\cdot$	ensemble de plans.
$A \cup a$	le point A est sur la droite a .
$A \cup \alpha$	le point A est dans le plan α .
$A, B, \dots \cup a, b, \dots$	les points $A, B, \dots$ sont sur les droites $a, b, \dots$
$A \cup' a, (A \cup' a)$	le point A n'est pas sur la droite a (dans le plan α).
$A, B, \dots \in E_1$	les points $A, B, \dots$ (les droites
$(a, b, \dots \in E_2, \alpha, \beta, \dots \in E_3)$	$a, b, \dots$, les plans $\alpha, \beta, \dots$) appartiennent à l'ensemble $E_1, (E_2, E_3)$.
ϵ'	n'appartient pas à.
$=$	est identique à.
$\neq$	n'est pas identique à.

Les points seront désignés par des majuscules, les droites par des minuscules latines et les plans par des minuscules grecques.

Décomposés en phrases aussi simples que possible et légèrement réduits, les axiomes d'incidence de Hilbert prennent la forme suivante:

I_1^* Si $A, B \in E_1$ et $A \neq B$, il existe $a \in E_2$ tel que $A, B \cup a$.

I_2^* Si $A, B \in E_1$, $a, b \in E_2$, $A \neq B$ et $A, B \cup a, b$, alors $a = b$.

- I_3^* Si $a \in E_2$, il existe $A, B \in E_1$ tels que $A \neq B$, $A, B \cup a$.
- I_4^* Il existe trois points $K, L, M \in E_1$ tels qu'il n'existe pas de droite $a \in E_2$ satisfaisant à la condition $K, L, M \cup a$ ⁷⁾.
- I_5^* Si $A, B, C \in E_1$, $A \neq B \neq C \neq A$ et s'il n'existe pas de droite $m \in E_2$ telle que $A, B, C \cup m$, il existe un plan $\alpha \in E_3$ tel que $A, B, C \cup \alpha$.
- I_6^* Si $A, B, C \in E_1$, $\alpha, \beta \in E_3$, $A \neq B \neq C \neq A$, $A, B, C \cup \alpha, \beta$ et s'il n'existe pas de droite $m \in E_2$ telle que $A, B, C \cup m$, alors $\alpha = \beta$ ⁸⁾.
- I_7^* Si $\alpha \in E_3$, il existe un point $A \in E_1$ tel que $A \cup \alpha$ ⁹⁾.
- I_8^* Si $A, B, C \in E_1$, $m \in E_2$, $\alpha \in E_3$, $A \neq B$, $A, B \cup \alpha$ et $A, B, C \cup m$, alors $C \cup \alpha$ ¹⁰⁾.
- I_9^* Si $A \in E_1$, $\alpha, \beta \in E_3$ et $A \cup \alpha, \beta$, il existe un point $B \in E_1$ tel que $A \neq B$ et $B \cup \alpha, \beta$ ¹¹⁾.
- I_{10}^* Il existe quatre points $P, Q, R, S \in E_1$ tels qu'il n'existe pas de plan $\alpha \in E_3$ satisfaisant à la condition $P, Q, R, S \cup \alpha$.
- I_{11}^* Il existe deux points $A, B \in E_1$ tels que $A \neq B$ ¹²⁾.

Les axiomes $I_1^* - I_{11}^*$ que nous venons d'énoncer seront appelés tout court axiomes I^* . Pour démontrer qu'ils sont équivalents aux axiomes d'incidence de Hilbert il suffit évidemment de prouver que les axiomes I_3 et I_8 de Hilbert résultent des axiomes I^* .

En effet, en vertu de I_4^* , il existe trois points $K, L, M \in E_1$ non en ligne droite. S'ils étaient identiques, au moins un des points dont il est question dans l'axiome I_{11}^* , p. ex. le point A , serait différent du point K ; $A \neq K = L = M$. En vertu de I_1^* il existerait une droite $a \in E_2$ telle que $A, K \cup a$. On aurait donc $K, L, M \cup a$, contrairement à l'hypothèse. Donc au moins deux des points K, L, M ne sont pas identiques, p. ex. $K \neq L$. En vertu de I_1^* il existe une droite $a \in E_2$ telle que $K, L \cup a$. Si le point M était identique au point K ou L , il serait sur la droite a et on aurait $K, L, M \cup a$. Donc $K \neq L \neq M \neq K$. Nous voyons donc que l'axiome I_3 de Hilbert résulte de I_1^*, I_3^*, I_4^* et I_{11}^* .

D'après I_5^* , les points K, L et M dont nous venons de parler sont dans un plan α . En vertu de I_{10}^* il existe quatre points de l'ensemble E_1 qui ne sont pas dans un plan. Au moins un d'eux, soit le point P , n'appartient pas à α , et, d'après I_6^* , les points K, L, M et P ne peuvent être dans un plan.

⁷⁾ Hilbert avait postulé de plus que $K \neq L \neq M \neq K$. Les axiomes I_3^* et I_4^* sont contenus dans son axiome I_3 .

⁸⁾ Axiome I_5 de Hilbert.

⁹⁾ L'axiome I_4 de Hilbert est une combinaison des axiomes I_3^* et I^* .

¹⁰⁾ Axiome I_6 de Hilbert.

¹¹⁾ Axiome I_7 de Hilbert.

¹²⁾ L'axiome I_8 de Hilbert est un peu plus fort que l'ensemble des axiomes I_{10}^* et I_{11}^* .

Donc le point P ne peut être identique à aucun des points K , L ou M . L'axiome I_8 de Hilbert est ainsi une conséquence de nos axiomes I_1^* , $I_8^* - I_8$, I_{10}^* et I_{11}^* .

2. Axiomes d'ordre.

Le symbole $A - B - C$ signifiera que B est entre A et C , $(A - B - C)'$ signifiera que B n'est pas entre A et C .

Avec ces notations nous pouvons énoncer les axiomes qui concernent la relation „entre”, c'est-à-dire les axiomes d'ordre:

- II_1^* Si $A, B, C \in E_1$ et $A - B - C$, il existe une droite $a \in E_2$ telle que $A, B, C \cup a$.
- II_2^* Si $A, B, C \in E_1$, $A, B, C \cup a \in E_2$ et $A - B - C$, alors $A \neq C$.
- II_3^* Si $A, B, C \in E_1$, $A, B, C \cup a \in E_2$ et $A - B - C$, alors $C - B - A$ ¹³⁾.
- II_4^* Si $A, B, C \in E_1$, $A, B, C \cup a \in E_2$ et $A - B - C$, alors $(A - C - B)'$ ¹⁴⁾.
- II_5^* Si $A, B \in E_1$, $A \neq B$ et $A, B \cup a \in E_2$, il existe un point $C \in E_1$ tel que $A - B - C$ ¹⁵⁾.
- II_6^* Si les points $A, B, C, D, E \in E_1$ sont différents entre eux et $A, B, C, D, E \cup a \in E_3$, si $A, B, D \cup c \in E_2$, $C \cup c$, $D, E \cup m \in E_2$, $A \cup m$, $B \cup m$ et $C \cup m$, enfin si $A - D - B$, il existe un point $F \in E_1$ tel que $F \cup m$ et $A - F - C$ ou $C - F - A$, ou $B - F - C$, ou $C - F - B$ ¹⁶⁾.
- Supposons maintenant que $A, B, C \in E_1$ et $A - B - C$. En vertu de II_1^* les points A, B et C sont sur une certaine droite $a \in E_2$ et, en appliquant II_2^* et II_3^* , nous arrivons à la conclusion que $A \neq C$ et $C - B - A$. D'après II_4^* il en résulte que $(A - C - B)'$ et $(C - A - B)'$; donc $C \neq B$ et $A \neq B$.

¹³⁾ Les axiomes II_1^* , II_2^* et II_3^* , pris ensemble, sont un peu plus faibles que l'axiome II_1 de Hilbert.

¹⁴⁾ Ceci correspond à un léger affaiblissement de l'axiome II_3 de Hilbert.

Dans les hypothèses des axiomes II_2^* , II_3^* et II_4^* on peut omettre la condition, résultant évidemment de l'axiome II_1^* , que les points dont il est question sont en ligne droite. De plus, il est facile de constater qu'un tel changement n'aurait aucune influence sur la validité des démonstrations de l'indépendance des axiomes que nous allons esquisser dans la suite (je dois cette remarque à M. S. J a ś k o w s k i).

¹⁵⁾ Cf. l'axiome II_2 de Hilbert.

Ici, la restriction que $A, B \cup a \in E_2$ est essentielle. Si nous l'avions rejetée, l'axiome I_8^* ne serait pas indépendant des axiomes II_8^* et II_1^* .

¹⁶⁾ Ceci correspond à l'axiome II_4 de Hilbert, dans l'énoncé duquel interviennent les notions secondaires de segment et de la relation d'incidence d'une droite et d'un plan.

La condition $A, B, D \cup c \in E_2$, contenue implicitement dans le texte original de Hilbert est essentielle; l'omission de cette condition renforcerait l'axiome II_6^* et la démonstration de l'indépendance de l'axiome II_6^* , présentée dans la suite, cesserait d'être valable.

Nous avons ainsi démontré que l'axiome II_1 de Hilbert résulte de nos axiomes $\text{II}_1^* - \text{II}_4^*$. Les trois axiomes de Hilbert du second groupe sont une conséquence évidente de nos axiomes du premier et du second groupe.

3. Indépendance des axiomes I^* et II^* .

La démonstration de l'indépendance d'un quelconque des axiomes $\text{I}_1^* - \text{I}_{11}^*$ ou $\text{II}_1^* - \text{II}_6^*$ consistera toujours à prouver la compatibilité du système d'axiomes que l'on obtient du système de tous les axiomes $\text{I}_1^* - \text{I}_{11}^*$ et $\text{II}_1^* - \text{II}_6^*$ en y remplaçant par sa négation l'axiome dont il s'agit de démontrer l'indépendance. La compatibilité se démontre en donnant une interprétation dans la géométrie analytique de l'espace cartésien à trois dimensions. Nous nous bornerons à donner des indications générales en laissant au lecteur le soin d'entrer dans les détails.

Les points, droites et plans de l'espace cartésien à trois dimensions seront appelés K -points, K -droites et K -plans. Les relations entre les figures dans l'espace cartésien seront distinguées par un astérisque.

*Indépendance de l'axiome I_1^**

E_1	ensemble de quatre K -points qui ne sont pas sur un K -plan
E_2	ensemble vide
E_3	ensemble de tous les K -plans déterminés par les groupes de trois K -points appartenant à l'ensemble E_1 ,
$\bigcup$	$\bigcup^*$
Relation „entre”	— relation vide

*Indépendance de l'axiome I_2^**

E_1	ensemble de tous les K -points
E_2	ensemble de toutes les K -droites orientées
E_3	ensemble de tous les K -plans
$\bigcup$	$\bigcup^*$
$A - B - C$	$A -^* B -^* C$

*Indépendance de l'axiome I_3^**

E_1	ensemble de K -points (à distance finie)
E_2	ensemble composé de K -droites et de K -droites à l'infini
E_3	ensembles de K -plans (à distance finie)
Relations	relations*

*Indépendance de l'axiome I_4^**

E_1	ensemble de K -points, situés sur une K -droite a déterminée
E_2	ensemble composé d'un seul élément a
E_3	ensemble vide
Relations	relations*

Indépendance de l'axiome I_5^*

E_1	ensemble de K -points
E_2	ensemble de K -droites
E_3	ensemble vide
Relations	relations*

Indépendance de l'axiome I_6^*

E_1	ensemble de K -points
E_2	ensemble de K -droites
E_3	ensemble de K -plans orientés
Relations	relations*

Indépendance de l'axiome I_7^*

E_1	ensemble de K -points
E_2	ensemble de K -droites
E_3	ensemble composé de K -plans et d'un K -plan à l'infini
Relations	relations*

Indépendance de l'axiome I_8^*

E_1	ensemble de K -points
E_2	ensemble composé d'un K -plan déterminé a et de K -droites qui ne sont pas dans a
E_3	ensemble composé de K -plans différents de a
Relations	relations*

Indépendance de l'axiomes I_9^* (ou II_{10}^*)

E_1, E_2, E_3	ensembles de points, droites et plans de l'espace cartésien à 4 dimensions (ou 2 dimensions)
-----------------	--

Indépendance de l'axiome I_{11}^*

E_1	ensemble composé d'un K -point
E_2 et E_3	ensembles vides
Relations	vides.

Indépendance des axiomes $II_1^* - II_4^*$

E_1, E_2, E_3	ensembles de K -points, K -droites et K -plans
-----------------	--

$\cup$

$\cup^*$

$A - B - C$

désigne respectivement l'une des quatre alternatives:
 (1) le K -point B est à l'intérieur de la K -sphère dont le diamètre est le K -segment $\overline{AC}$,

- (2) $A = C \neq B$,
 (3) $A \text{ ---}^* B \text{ ---}^* C$ et $\overline{AB} \leq \overline{BC}$ ¹⁷⁾,
 (4) $A, B, C \bigcup^* a \in E_2$ et $A \neq B \neq C \neq A$.

Indépendance de l'axiome II₅

E_1	ensemble de K -points appartenant à un demi-espace cartésien fermé
E_2	ensemble de K -droites ayant de points communs avec ce demi-espace
E_3	ensemble de K -plans ayant de points communs avec ce demi-espace
Relations	relations*

Indépendance de l'axiome II₆

E_1	ensemble de K -points dont les distances à l'origine sont supérieures à l'unité (extérieur d'une K -sphère)
E_2, E_3	ensembles de K -droites et K -plans
Relations	relations*

4. Axiomes de congruence.

Nous admettrons maintenant comme connue la partie de la géométrie absolue qui est fondée sur les axiomes de congruence et d'ordre de Hilbert ¹⁸⁾. En particulier, nous supposerons connues les notions de segment, de demi-droite, de demi-plan et d'angle, ainsi que leurs propriétés fondamentales. Nous allons utiliser les notations et abréviations suivantes:

AB	droite déterminée par les points A et B .
ABC	plan déterminé par les points A, B et C .
AB^+	demi-droite ouverte d'origine A , sur laquelle est situé le point B .
AB^-	demi-droite opposée d'origine A .
ABC^+	demi-plan ouvert limité par la droite AB , sur lequel est situé le point C .
ABC^-	demi-plan opposé limité par AB .

¹⁷⁾ $\overline{AB}$ désigne le segment d'extrémités A et B .

¹⁸⁾ Voir [4], Chap. I, § 2—4; cf. aussi commentaires dans l'édition russe, p. 403—428, ou bien [3], p. 40—61.

- $\overline{AB}$ segment d'extrémités A et B .
 $\sphericalangle ABC$ angle (inférieur à deux droits) de côtés BA^+ et BC^+ .
 $\triangle ABC$ triangle de sommets A, B et C .
 $A_1 - A_2 - A_3 - \dots - A_n$ désigne la condition suivante: si $i < j < k$, alors $A_i - A_j - A_k$ ($i, j, k = 1, 2, \dots, n$).
 $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ le segment $\overline{AB}$ est congruent au segment $\overline{CD}$.
 $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle KLM$ l'angle ABC est congruent à l'angle KLM .
 $\triangle ABC \cong \triangle KLM$ $\overline{AB} \cong \overline{KL}$, $\overline{BC} \cong \overline{LM}$, $\overline{CA} \cong \overline{MK}$, $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle KLM$,
 $\sphericalangle BCA \cong \sphericalangle LMK$, $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle MKL$.

Les propriétés de la congruence des segments et des angles font l'objet du troisième groupe d'axiomes:

- III_1^* Si $A, B, C, D \in E_1$, $A \neq B$ et $C \neq D$, il existe un point $E \in E_1$ tel que $E \in \overline{CD}^+$ et $\overline{AB} \cong \overline{CE}$ ¹⁹⁾.
 III_2^* Si $A, B, C, D, E, F \in E_1$, $A \neq B$, $C \neq D$, $E \neq F$, $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ et $\overline{CD} \cong \overline{EF}$, alors $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ²⁰⁾.
 III_3^* Si les points A, B, C ne sont pas en ligne droite et les points D, E, F ne sont pas en ligne droite, il existe un point G tel que $G \in \overline{DEF}^+$ et $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEG$.
 III_4^* Si les points A, B, C ne sont pas en ligne droite, les points D, E, F ne sont pas en ligne droite et $G \in \overline{DEF}^+$, enfin si $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF$ et $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEG$, alors $G \in \overline{DF}^+$ ²¹⁾.
 III_5^* Si les points A, B et C ne sont pas en ligne droite et les points A', B', C' ne sont pas en ligne droite, si, de plus, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ et $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$, alors $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$ ²²⁾.

Chacun des axiomes $III_1^* - III_5^*$ est indépendant des autres, ainsi que de tous les axiomes $I_1^* - I_{11}^*$ et $II_1^* - II_6^*$. L'indépendance peut être démontrée de même que pour les axiomes I^* et II^* . Les ensembles E_1, E_2, E_3 sont toujours interprétés comme ensembles de K -points, K -droites et K -plans, les relations d'incidence et „entre” ont leur sens usuel. Par contre, les relations de congruence des segments et des angles doivent être inter-

¹⁹⁾ C'est une modification, non essentielle, de l'axiome III_1 de Hilbert.

²⁰⁾ Cf. l'axiome III_2 de Hilbert.

²¹⁾ Les axiomes III_3^* et III_4^* correspondent à la première partie de l'axiome III_4 de Hilbert.

²²⁾ Ceci correspond à l'axiome III_5 de Hilbert.

prêtées, suivant le cas, de manières différentes, ainsi que le montre le tableau suivant:

Indépendance de l'axiome	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	$\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEE$
III ₁ [*]	$\overline{AB} = \overline{CD}$	$\sphericalangle ABC \cong^* \sphericalangle DEF^*)$
III ₂ [*]	$\overline{AB} =_m 2 \overline{CD}^{**})$	"
III ₃ [*]	$\overline{AB} \cong^* \overline{CD}$	$\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$
III ₅ [*]	"	$\sphericalangle ABC$ et $\sphericalangle DEF$ tout à fait arbitraires ^{***)}
III ₅ [*]	"	$\sphericalangle ABC =_m 2 \sphericalangle DEF$

) Le symbole $\cong^$ désigne la congruence dans l'espace cartésien.

**) Le signe $=_m$ désigne l'égalité des mesures (Cf. [7], p. 166).

***) Cf. [7] p. 167.

La preuve que tous les axiomes du groupe III de Hilbert résultent de nos axiomes I^{*}, II^{*} et III^{*} est beaucoup plus compliquée. Il suffit évidemment de démontrer que nos axiomes entraînent les deux thèses suivantes:

T₁. *Tout angle est congruent à lui-même.*

T₂. Si $A_i, B_i, C_i \cup a_i, A_i - B_i - C_i$ pour $i = 1, 2$, $\overline{A_1 B_1} \cong \overline{A_2 B_2}$ et $B_1 C_1 \cong \overline{B_2 C_2}$, alors $\overline{A_1 C_1} \cong \overline{A_2 C_2}$.

Ces thèses seront démontrées dans les chapitres suivants.

5. Réflexivité de la congruence d'angles.

Les propositions suivantes résultent, de façon connue, des axiomes I^{*}, II^{*} et III^{*} 23):

P₁. La congruence des segments est une relation réflexive, symétrique et transitive.

P₂. Si $A \neq B$ et $C \neq D$, il existe exactement un point E tel que $E \in \overline{CD}$ et $\overline{AB} \cong \overline{CE}$.

P₃. Si les deux triangles $\triangle ABC$ et $\triangle A'B'C'$ satisfont aux conditions

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \text{ et } \sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C',$$

alors $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

P₄. Si les triangles $\triangle ABC$ et $\triangle A'B'C'$ satisfont aux conditions

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C' \text{ et } \sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C',$$

alors $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

²³⁾ Cf. D. Hilbert, [4], Chap. I, § 5 et 6.

Remarque. En énonçant ses axiomes d'incidence D. Hilbert ajoute une explication concernant le sens des expressions *zwei Punkte*, *zwei Geraden*, *drei Punkte*, etc., à savoir qu'il s'agit toujours de deux points différents, deux droites différentes, trois points différents deux à deux, etc. On pourrait, par analogie, interpréter son axiome III_3 comme il suit:

III_3^* . Si les points A, B et C ne sont pas en ligne droite et les points A', B' et C' ne sont pas en ligne droite, si, de plus, la suite des trois points (A', B', C') n'est pas une permutation de la suite (A, B, C) , si, enfin, $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ et $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$, alors $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$.

Nous allons montrer que les axiomes I^* , II^* , III_1^* — III_4^* et III_5^{**} entraînent l'axiome III_5^* .

Supposons, en effet, que les points A, B, C ne soient pas en ligne droite et qu'il en soit de même des points A', B', C' . Soit $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ et $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$. Si (A', B', C') n'est pas une permutation de (A, B, C) , alors $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$ en vertu de l'axiome III_5^{**} . Dans le cas contraire la dernière congruence exige encore une démonstration. Admettons, à cet effet, que $C^* \in A'B'C'$, $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C^*$ et $\overline{BC} \cong \overline{B'C^*}$. Il s'agit de prouver que $C^* = C'$.

Supposons pour cela que le point C^* soit différent du point C' . Alors, (A', B', C^*) n'étant évidemment pas une permutation de (A, B, C) , on aurait, en vertu de III_5^{**} ,

$$\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C^*, \quad \text{d'où}$$

$$C^* \in A'C' \quad \text{et} \quad \sphericalangle BCA \cong \sphericalangle B'C^*A'.$$

Soit encore $A^* \in C^*A'$ et $\overline{CA} \cong \overline{C^*A^*}$. D'après III_5^{**}

$$\sphericalangle CBA \cong \sphericalangle C^*B'A^*.$$

Or, $\sphericalangle CBA = \sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C^* = \sphericalangle C^*B'A'$. Mais les deux dernières congruences entraînent, en vertu de l'axiome III_4^* , l'identité $\sphericalangle C^*B'A^* = \sphericalangle C^*B'A'$ et par conséquent $A^* = A'$, d'où $\overline{AC} \cong \overline{A'C^*}$.

Admettons, enfin, que $D \in A'C'B'$, $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle C'A'D$ et $\overline{AB} \cong \overline{A'D}$. Il vient de III_5^{**} que $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'DC'$ et $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'DC^*$, d'où, encore d'après III_4^* , $C^* \in DC'$, mais ceci est incompatible avec l'hypothèse que $C^* \neq C'$. Nous voyons donc que $C^* = C'$, c'est-à-dire $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$.

Notre proposition est ainsi démontrée.

Pour pouvoir aller plus loin il nous faut prouver la thèse T_1 . Voici comment on la démontre:

Soit $\sphericalangle BAC$ un angle donné. En vertu de III_3^* , III_1^* et P_3 il existe un point C' tel que $C' \in ABC^-$ et $\triangle BAC \cong \triangle BAC'$ (fig. 1). La droite $\overline{CC'}$ coupe la droite $\overline{AB}$ en un point D . Dans chacun des trois cas possibles $D \in AB^+$, $D = A$ ou $D \in AB^-$ il existe évidemment un point E tel que $E \in AB^+$ et $(A - E - D)'$. Il résulte de la proposition P_3 que $\triangle EAC \cong \triangle EAC'$. On déduit de là $\sphericalangle DEC \cong \sphericalangle DEC'$ et $\overline{EC} \cong \overline{EC'}$, donc

$$\triangle EDC \cong \triangle EDC'$$

et

$$\sphericalangle C'CE = \sphericalangle DCE \cong \sphericalangle DC'E = \sphericalangle CC'E.$$

Sans diminuer la généralité du raisonnement nous pouvons admettre que

$$\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OB'}.$$

Cela étant (fig. 2), nous voyons (P_3) que

$$(3) \quad \overline{AB} \cong \overline{AB'}.$$

Il en résulte, d'après P_5 et P_3 ,

$$\sphericalangle OB'A \cong \sphericalangle OBA$$

$$\triangle OB'A \cong \triangle OBA \text{ et}$$

$$(4) \quad \sphericalangle AOB' \cong \sphericalangle AOB,$$

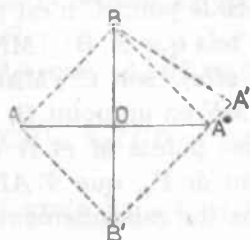


Fig. 2

les deux membres de la congruence (1) peuvent donc être intervertis.

Nous choisissons maintenant le point A' de façon que $A' \in B'BA^-$ et

$$(5) \quad \triangle B'BA \cong \triangle B'BA',$$

ce qui est possible en vertu des axiomes III_3^* et III_1^* et de la proposition P_3 . D'après l'axiome de Pasch (II_6^*) et la relation (2) la droite AO a un point commun A^* avec l'un au moins des segments BA' ou $B'A'$.

Supposons que $A^* \in B'A'$. Alors, comme on le démontre aisément au moyen de P_3 , on a

$$\triangle A^*AB \cong \triangle A^*AB',$$

d'où

$$\overline{B'A^*} \cong \overline{BA^*}.$$

D'autre part, d'après (3) et (5) on doit avoir

$$\overline{B'A'} \cong \overline{BA'}.$$

Des deux dernières relations il résulte, en vertu de P_6 , que

$$A^* = A'.$$

Lorsque $A^* \in BA'$ le raisonnement est analogue.

Ainsi nous avons démontré que les points A, O et A' sont en ligne droite et $A - O - A'$. De la relation (5) il résulte que $\overline{BA} \cong \overline{BA'}$ et $\sphericalangle OBA \cong \sphericalangle OBA'$. On en déduit, en vertu de P_3 , que

$$\triangle AOB \cong \triangle A'OB \text{ et}$$

$$(6) \quad \sphericalangle AOB \cong \sphericalangle A'OB.$$

Dans la première partie de la démonstration nous avons prouvé que (1) entraîne (4). D'une façon tout à fait analogue (6) entraîne la congruence

$$(7) \quad \overline{A'OB} \cong \overline{AOB}.$$

Les relations (4), (6) et (7), qui résultent de (1) et (2), établissent la proposition.

Dans la démonstration de la thèse T_1 , nous avons prouvé en passant l'existence des angles droits. La proposition suivante est plus précise:

P_8 . Si le point C n'est pas sur la droite MN , $M \neq N$, il existe des points A et B tels que $A, B \in MN$, $A \neq B$ et $\sphericalangle ABC$ est droit.

En effet, soit $C' \in MNC^-$ et $\triangle MNC \cong \triangle MNC'$. La droite CC' coupe la droite MN en un point B ; évidemment $C - B - C'$. En choisissant pour A celui des points M et N qui est différent de B on prouve aisément, en profitant de P_3 , que $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle ABC'$.

Dans les raisonnements ultérieurs nous aurons besoin de la proposition suivante:

P_9 . Si les points A, B et C ne sont pas en ligne droite et si $\sphericalangle BAC$ est droit, alors les segments $\overline{AC}$ et $\overline{BC}$ ne sont pas congruents.

En effet, si l'on avait $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, alors, en supposant que $C - A - D$, $\overline{AC} \cong \overline{AD}$, $E \in CB^+$ et $\overline{CD} \cong \overline{CE}$, nous aurions (fig. 3) $\triangle BCD \cong \triangle ACE$, $\overline{BD} \cong \overline{AE}$; il en résulterait $\overline{AD} \cong \overline{AE}$, en contradiction avec P_6 .

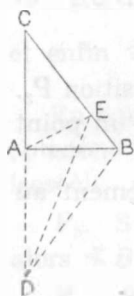


Fig. 3

Supposons maintenant que les points A, B, C ne sont pas en ligne droite et $\overline{AC} \cong \overline{BC}$. Admettons en plus que $D \in AB$ et que les droites AB et CD se coupent à angles droits (cf. P_8). Supposons que $D \in AB^+$ (dans le cas où $D \in BA^+$ le raisonnement serait analogue). Soit $D' \in BA^+$ et $\overline{AD} \cong \overline{BD'}$. Donc $\triangle ADC \cong \triangle BD'C$ (cf. P_5), $\overline{DC} \cong \overline{D'C}$ et, en vertu de P_9 , on doit avoir $D = D'$. Il en résulte $A - D - B$ et $\overline{AD} \cong \overline{DB}$.

Nous avons ainsi démontré la proposition:

P_{10} . Dans un triangle isocèle la hauteur qui correspond à la base divise celle-ci en deux parties égales.

Nous sommes maintenant en état de démontrer la proposition fondamentale suivante, relative au deltoïde ²⁴⁾:

P_{11} . Si les points A, B et C ne sont pas en ligne droite, $D \in ACB^-$, $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ et $\overline{CB} \cong \overline{CD}$, alors $\triangle ABC \cong \triangle ADC$.

Démonstration. Supposons remplies les hypothèses de la proposition. Si les points A, B et D , où C, B et D sont en ligne droite, il suffit d'appliquer les propositions P_5 et P_3 pour obtenir la thèse demandée. C'est pourquoi nous supposerons que ni les points A, B et D , ni les points C, B et D ne sont en ligne droite (fig. 4). Le triangle $\triangle BDA$ est alors isocèle et sa hauteur $\overline{EA}$ abaissée sur la base $\overline{BD}$ divise celle-ci

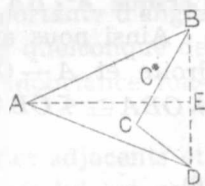


Fig. 4

²⁴⁾ Cf. D. Hilbert, [4], Chap. I, § 6, Théorème 17.

deux parties égales (P_{10}). En vertu de l'axiome de Pasch (II_8) la droite AE coupe en un point C^* le segment CB ou bien le segment CD . Évidemment $\triangle C^*EB \cong \triangle C^*ED$, d'où $\overline{C^*B} \cong \overline{C^*D}$. D'autre part, d'après l'hypothèse, $\overline{CB} \cong \overline{CD}$. D'après P_8 on doit donc avoir $C^* = C$.

Dans le cas où $C \in AE^+$ on démontre (P_9) que $\triangle ABE \cong \triangle ADE$, $\sphericalangle EAB \cong \sphericalangle EAD$ et $\triangle CAB \cong \triangle CAD$.

Dans le cas où $C \in AE^-$, $\triangle CEB \cong \triangle CED$. $\sphericalangle ECB = \sphericalangle ECD$ et $\triangle ACB \cong \triangle ACD$.

Nous constatons ainsi que la proposition est vraie dans tous les cas possibles.

De la proposition P_{11} on déduit, par une méthode connue, la proposition sur la congruence des triangles ayant leurs côtés égaux chacun à chacun, ainsi que la proposition sur la symétrie et la transitivité de la congruence des angles ²⁵⁾:

P_{12} . Si les points A_i, B_i, C_i ne sont pas en ligne droite pour $i = 1, 2$ et si $\overline{A_1B_1} \cong \overline{A_2B_2}$, $\overline{A_1C_1} \cong \overline{A_2C_2}$ et $\overline{B_1C_1} \cong \overline{B_2C_2}$, alors $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$.

P_{13} . La relation de congruence des angles est symétrique et transitive.

Nous avons prouvé que les axiomes I^* , II^* et III^* entraînent comme conséquences les propriétés fondamentales de la congruence. En ce qui concerne les angles, nous n'avons pas pu appliquer la méthode, due à A. Rosenthal, utilisée dans les Fondements de la Géométrie de D. Hilbert, car nous ne disposons pas encore de la thèse T_2 . Nous ne l'établirons que dans le chapitre suivant, en profitant essentiellement de la proposition P_{13} .

7. Proposition sur la congruence des sommes de segments.

En profitant de la propriété de la congruence des angles, que nous venons d'énoncer (P_{13}), et de la proposition P_4 , nous obtenons immédiatement la réciproque de la proposition sur le triangle isocèle:

P_{14} . Si les points A, B et C ne sont pas en ligne droite et $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle BAC$, alors $\overline{AC} \cong \overline{BA}$.

La démonstration de la proposition suivante est tout aussi simple:

P_{15} . Si $A \neq B$ et $A, B \cup \alpha$, il existe un point $C \in \alpha$ tel que $C \cup' AB$ et $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.

Pour déterminer ce point C nous fixons arbitrairement dans le plan α un point D en dehors de la droite AB . Il existe alors un point $D' \in ABD^+$ tel que

$$\triangle ABD \cong \triangle BAD'$$

²⁵⁾ D. Hilbert, [4], Chap. I, § 6, Théorème 18 et 19.

Pour le démontrer il suffit de choisir sur la droite A_1A_2 les points B', C', B'', C'' tels que $B' \in A_1A_2$, $C' \in B'A_1$, $B'' \in A_2A_1$, $C'' \in C'A_2$, $A_1B' \cong A_1B_1 \cong A_2B_2 \cong A_2B''$ et $B'C' \cong B_1C_1 \cong B_2C_2 \cong B''C''$ (fig. 6). Évidemment $C' - B' - A_1 - A_2 - B'' - C''$ et, en vertu du Lemme 3, on doit avoir $A_1C' \cong A_2C''$. En tenant compte du Lemme 2 on en conclut que le lemme 4 est vrai.

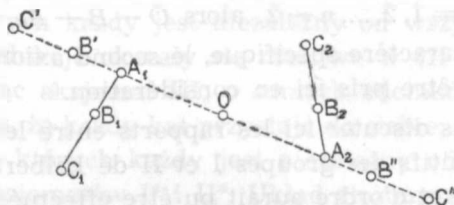


Fig. 6

Les lemmes 1—4 fournissent la démonstration de la thèse T_2 . Les axiomes $III_1^* - III_5^*$ sont donc suffisants pour la reconstruction du système des axiomes primitifs de Hilbert $III_1 - III_5$.

8. Remarques finales.

La voie que nous avons suivie est assez longue et pénible. On peut donc se poser la question si l'on ne pourrait pas obtenir de meilleur résultat en rejetant d'autres hypothèses superflues de Hilbert, au lieu des thèses T_1 et T_2 . La réponse est négative, car, comme le montre l'interprétation donnée dans le chapitre 4, chacun des axiomes III_1^* , III_2^* , III_3^* et III_4^* est indépendant de tous les autres axiomes du groupe III^* , des axiomes des groupes I^* et II^* ainsi que des thèses T_1 et T_2 . L'axiome III_5^* , comme l'a démontré Hilbert²⁶⁾, est aussi indépendant des autres axiomes de congruence, ainsi que de T_1 et T_2 et des axiomes précédents.

Il est aisé de remarquer que chacun des axiomes $III_1^* - III_5^*$ est indépendant du système composé des autres axiomes I^* , II^* , III^* et de l'axiome de parallélisme, euclidien ou non euclidien, et aussi de l'axiome de continuité de Dedekind²⁷⁾. Ceci résulte des interprétations données dans le chapitre 4 ainsi que des interprétations au moyen de modèles, convenablement modifiés, non euclidiens.

²⁶⁾ [4], Chap. II, § 11, cf. aussi [7], p. 169.

²⁷⁾ Cet axiome est souvent appliqué au lieu des axiomes V_1 et V_2 de Hilbert dans les manuels et les monographies sur les fondements de la géométrie élémentaire; cf. p. ex. [5].

Afin de prouver, d'une manière analogue, l'indépendance des axiomes III de l'axiome d'Archimède²⁸), il faut donner à celui-ci une forme plus précise que celle qu'a utilisée Hilbert. On peut p. ex. le formuler comme il suit:

Si $O - A - B$, il existe un nombre entier positif n tel que, si $O - A - A_1 - A_2 - \dots - A_n$ et $OA \cong AA_1$, $AA_1 \cong A_1A_2$, $A_iA_{i+1} \cong A_{i+1}A_{i+2}$ pour $i = 1, 2, \dots, n-2$, alors $O - B - A_n$.

A cause de son caractère spécifique, le second axiome de continuité V_2 de Hilbert ne peut être pris ici en considération.

Nous n'allons pas discuter ici les rapports entre les axiomes I^* et II^* et les axiomes primitifs des groupes I et II de Hilbert. La réduction des axiomes d'incidence et d'ordre aurait pu être effectuée d'une manière un peu différente de la notre (Cf. [7]). Le problème de l'indépendance des axiomes I^* et II^* des axiomes de parallélisme et de continuité exigerait une étude particulière.

Revenant au sujet principal de notre travail, qui a été l'étude de l'indépendance dans les trois premiers groupes d'axiomes, remarquons pour terminer que les résultats qui y ont été exposés s'appliquent aussi bien dans la géométrie euclidienne, que dans la géométrie non euclidienne, et aussi dans la géométrie non archimédienne.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Bielecki A., *Réduction des axiomes de congruence de Hilbert*, Bull. Acad. Pol. Sci., Cl. III, 4, 6 (1956), p. 321—324.
- [2] Cassina Ugo, *Ancora sui fondamenti della geometria secondo Hilbert I, II, III*, Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend., Cl. Sci. Mat. Nat., Serie III, 81 (1948), p. 71—94, 82 (1949), p. 67—84, 85—94.
- [3] Ефимов Н. В., *Высшая геометрия*, ОГИЗ, Москва-Ленинград 1949.
- [4] Hilbert D., *Grundlagen der Geometrie*, VII Aufl., Leipzig u. Berlin, 1930; cf. aussi l'édition russe: Д. Гильберт, *Основания геометрии*, ОГИЗ, Москва-Ленинград, 1948.
- [5] Костин В. Н., *Основания геометрии*, Москва 1948.
- [6] Väisälä K., *Über die Kongruenzaxiome der Geometrie*, Ann. Acad. Sci. Fennicae, A 44, 4 (1935), p. 1—12.
- [7] Walker R., *Die Hilbertschen Axiome der Geometrie und ihre gegenseitige Unabhängigkeit*, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Phys. Kl., 95 (1943), p. 151—170.

²⁸) Cf. [4], § 8.

Streszczenie

Układ aksjomatów geometrii euklidesowej zawarty w siódmym wydaniu Podstaw geometrii D. Hilberta nie jest niezależny, mimo daleko posuniętej redukcji ilości tych aksjomatów w stosunku do wydania pierwszego. W pracy niniejszej przez lekkie osłabienie aksjomatów grupy I i II otrzymuje się równoważne im, nieco zredukowane grupy aksjomatów I^* i II^* , z których każdy jest niezależny od wszystkich pozostałych. Bardziej istotne redukcje okazały się możliwe w III grupie aksjomatów Hilberta. Odrzucając aksjomat III_3 o sumach odcinków i część aksjomatu III_4 , która orzeka, że każdy kąt przystaje do siebie, otrzymuje się układ aksjomatów III^* , z których każdy jest niezależny od pozostałych aksjomatów III^* i od aksjomatów I^* i II^* . Układ złożony z aksjomatów I^* , II^* i III^* jest równoważny układowi aksjomatów I, II i III Hilberta.

Резюме

Система аксиом евклидовой геометрии, содержащаяся в 7-ом издании „Основ геометрии” Д. Гильберта, не независима, несмотря на далеко подвинутое сокращение числа этих аксиом по сравнению с первым изданием.

В предлагаемом труде путём незначительного ослабления аксиом I и II групп получают несколько сокращённые равносильные им группы аксиом I^* и II^* , в которых каждая аксиома независима от всех остальных. Более существенные сокращения возможны в III-ей группе аксиом Гильберта. Отбрасывая аксиому III_3 о суммах отрезков и часть аксиомы III_4 , которая гласит, что всякий угол совмещается с собой, получается система аксиом III^* , из которых каждая независима от прочих аксиом III^* и от аксиом I^* и II^* . Система, составленная из аксиом I^* , II^* и III^* , равносильна системе аксиом I, II, III Гильберта.

