ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. IX, 3 SECTIO A 1955

Z Zakładu Matematyki II Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. nadzw. dr Adam Bielecki

ADAM BIELECKI

Extension de la méthode du rétracte de T. Ważewski aux équations au paratingent

Przeniesienie metody „retraktowej" T. Ważewskiego na równania paratyngensowe

Перенесение „ретрактного" метода Т. Важевского на паратигентные уравнения

La théorie des équations au paratingent, qui n'est en réalité qu'une modification de la théorie des inégalités différentielles ordinaires, initiée par S. K. Zaremba [16, 17 et 18] et A. Marchaud [12], et étroitement liée à la géométrie directe de G. Bouligand [8], est encore relativement peu développée bien qu'elle présente d'indiscutables avantages. Le principal d'eux consiste en ce que les équations au paratingent, qui sont une généralisation étendue, bien que naturelle, des systèmes d'équations différentielles ordinaires, conservent beaucoup de leurs propriétés, particulièrement importantes dans l'étude qualitative de l'allure des intégrales et de la structure de leurs familles. De plus, la théorie des équations au paratingent synthétise dans une certaine mesure la théorie des équations et celle des inégalités différentielles, fournissant certains procédés méthodologiques qui peuvent être appliqués avec succès dans ces théories, en particulier dans le cas où les intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires ne satisfont pas à la condition d'unicité.

Dans un travail antérieur [2 et 3], auquel je vais renvoyer dans la suite, j'ai appliqué la théorie des équations au paratingent à l'étude de l'unicité des solutions des systèmes d'équations différentielles ordinaires et, en même temps aussi au même problème relatif aux équations au paratingent. J'y ai exposé, de façon assez systématique, un fragment de la théorie de ces équations.

Dans le présent mémoire je me propose d'étudier la possibilité d'étendre, en les adaptant convenablement, au domaine des équations au paratingent (et, par cela même, aux équations différentielles ne satisfaisant pas à la condition d'unicité) certaines méthodes d'étude qualitative de l'allure des intégrales des équations différentielles, élaborées par l'École mathématique de Cracovie, à savoir la méthode dite du rétracte de T. Ważewski [**14**] et les variantes de cette méthode, données par d'autres auteurs [**1**], [**13**].

La généralisation de ces méthodes à une classe d'équations beaucoup plus étendue présente une difficulté que je n'ai pas réussi à surmonter tout à fait: elle consiste en ce que, dans la méthode de T. Ważewski, l'unicité des intégrales joue un rôle essentiel.. C'est pourquoi les familles d'intégrales, remplissant des ensembles ouverts, ont localement une structure topologique identique à celle d'un faisceau de droites parallèles. Les difficultés et les complications n'apparaissent qu'à la frontière des domaines. Dans le cas des équations différentielles ne satisfaisant pas à la condition d'unicité, et a fortiori des équations au paratingent, les complications à la frontière augmentent considérablement et, en même temps, on voit surgir des difficultés qualitativement tout à fait nouvelles. Même dans l'intérieur du domaine et localement, une famille d'intégrales d'une équation au paratingent ne rappelle pas, même grossièrement, un faisceau de droites.

C'est pourquoi l'idée s'imposait de façon naturelle, pour l'étude en question, de régulariser l'équation au paratingent en la remplaçant par un système régulier d'équations différentielles dans l'intérieur du domaine considéré, en conservant toutefois le caractère local de l'allure des solutions dans le voisinage de la frontière, dans la mesure nécessaire pour permettre l'application de la méthode du rétracte. Il a fallu pourtant imposer en même temps certaines conditions accessoires relatives à la frontière.

L'idée de la régularisation exposée ici diffère assez essentiellement de la méthode, donnée par T. Ważewski dans la fin du travail ([**14**], p. 313); dans les théorèmes sur la régularisation (th. 1 et 2, chap. 5), qui constituent le but principal de ce travail, l'équation au paratingent n'est pas modifiée à la frontière du domaine (1).

Les théorèmes 3 et 4 (chap. 6), qui résultent de cette méthode de régularisation, se rattachent de près aux travaux relatifs à la méthode du rétracte [**14**], [**1**], [**13**], bien qu'ils ne soient pas des généralisations des théorèmes donnés dans ces travaux (la possibilité d'une généralisation au sens strict semble problématique).

Les démonstrations des théorèmes énoncés dans ce travail sont assez pénibles, un certain nombre d'elles n'a pu être qu'esquissé. Les recherches entreprises ici trouvent une certaine justification dans le fait que les mathématiciens s'intéressent actuellement de plus en plus à l'étude des équations différentielles qui ne satisfont pas à la condition d'unicité, comme le prouve p. ex. le volumineux travail, récemment publié, de P. Hartman et A. Wintner |9|. Les résultats acquis jusqu'à présent au moyen de la méthode du rétracte de T. Ważewski permettent d'espérer qu'elle pourra être appliquée avec succès à des systèmes d'équations différentielles moins réguliers.

Les chapitres 1 et 2 sont consacrés à l'exposition de notions préliminaires et de quelques lemmes. Je les ai traités d'une manière assez détaillée, car la théorie des équations au paratingent est relativement peu connue.

Comme problèmes principaux, suggérés par ce travail et non résolus, je considère les questions suivantes: 1° est-il possible, et dans quelle mesure, de se débarasser dans le théorème 2 de l'hypothèse que l'ensemble $\Phi - \widetilde{S}$ est un F_σ, 2° le champ $M''(P)$, figurant au théorème 2, peut-il, et moyennant quelles hypothèses, être défini de sorte que les ensembles $\widetilde{S}$ et e ne subissent pas de modification si l'on remplace $M(P)$ par $M''(P)$, 3° $M''(P)$ peut-il être défini de telle manière que par chaque point de l'ensemble $\widetilde{S}$ il sorte du domaine B au plus une intégrale de ce champ. Aucun de ces problèmes ne semble simple.

1. Champs de pinceaux de droites

Soient U et V deux ensembles contenus dans l'espace euclidien (réel) E_{n+1} à $n+1$ dimensions, P et Q deux points appartenant à E_{n+1}. Nous désignerons par $|U,V| = |V,U|$, $|U,Q| = |Q,U|$ et $|P,Q| = |Q,P|$ respectivement la *distance* entre les ensembles U et V au sens de Hausdorff, la distance inférieure entre le point Q et l'ensemble U[1]) et la distance entre les points P et Q. Les mêmes notations seront utilisées dans le cas d'ensembles et de points dans l'espace euclidien E_n à n dimensions. L'ensemble des points $P \epsilon E_{n+1}$ tels que $|U,P| < \varepsilon$ sera désigné par $\mathrm{K}(U,\varepsilon)$ et sa fermeture par $\overline{\mathrm{K}}(U,\varepsilon)$, l'ensemble des points $x \epsilon E_n$ tels que $|u,x| < \varepsilon$, où $u \subset E_n$, sera désigné par $\mathrm{k}(u,\varepsilon)$ et sa fermeture par $\overline{\mathrm{k}}(u,\varepsilon)$.

Soit $m \subset E_n$ un ensemble non vide, borné, fermé et convexe de points. L'ensemble M des droites menées du point fixe $(-1, 0, \ldots, 0) \epsilon E_{n+1}$ aux points $(0,x) = (0, x, \ldots, x_n) \epsilon E_{n+1}$, où $x \epsilon m$, sera dit *pinceau de droites*, ou bien *pinceau*, et l'ensemble m — sa *trace*, en symbole $m = \text{Trace}\,(M)$.

[1]) Cf. [10], p. 291 — 293.

Nous dirons que le pinceau M est *contenu* dans le pinceau M' (resp. *contenu dans l'intérieur* du pinceau M') et nous écrirons $M \subseteq M'$ (resp. $M \underset{i}{\subseteq} M'$) lorsque $m \subseteq m' =$ Trace (M') (resp. lorsque m est contenu dans l'intérieur de m'). Le pinceau qui contient une seule droite (et dont la trace se réduit à un seul point) sera dit *élément linéaire*. L'élément linéaire dont la trace est le centre de gravité de $m =$ Trace (M) s'appellera *centre du pinceau* M, en symbole Centre (M). La distance entre deux pinceaux sera entendue comme celle de leurs traces: $|M, M'| = |m, m'|$. L'ensemble de tous les pinceaux (dans E_{n+1}) devient ainsi un espace métrique. Le symbole $\bar{k}(M, \varepsilon)$ désignera le pinceau dont la trace est $\bar{k}(m, \varepsilon)$[2]).

Supposons que les ensembles $m_i \in E_n$, $i = 1, 2, \ldots, p$, soient bornés, fermés et convexes, et que

$$\lambda_i > 0,\ \Lambda = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i > 0,\ \mu_i = \frac{\lambda_i}{\Lambda}.$$

Soit, pour $i = 1, 2, \ldots, p$, $x^i \in m_i$ et considérons l'ensemble m des centres de gravité

$$\sum_{i=1}^{p} \mu_i x^i$$

de tous les systèmes de points $x^1, x^2, \ldots x^p$, où $x^i \in m_i$. Cet ensemble m est borné, fermé et convexe et il sera dit *agrégat des ensembles* m_i, en symbole

$$m = \underset{i=1,2,\ldots p}{\mathrm{Agr}} (m_i, \lambda_i).$$

Pareillement

$$M = \underset{i=1,2,\ldots p}{\mathrm{Agr}} (M_i, \lambda_i) \text{ si Trace } (M) = \underset{i=1,2,\ldots p}{\mathrm{Agr}} (\text{Trace } (M_i), \lambda_i).$$

Le symbole

$$\overline{\sum_{i=1,2,\ldots p}} M_i$$

désignera le moindre pinceau contenant tous les M_i, $i = 1, 2, \ldots p$, c'est-à-dire le produit de tous les pinceaux contenant l'ensemble des droites $\sum_{i=1,2,\ldots p} M_i$.

Une fonction $M(P)$ qui fait correspondre un pinceau à tout point P d'un ensemble $D \subseteq E_{n+1}$ sera appelée *champ de pinceaux* ou *champ* tout

[2]) J'adopte dans ce Chapitre les définitions que j'ai déjà introduites dans un travail antérieur [2], p. 51, et qui ne diffèrent pas essentiellement de celles introduites par S. K. Zaremba [16] et [17].

court si la trace $m(P) = \text{Trace}\,(M(P))$ est dans D une fonction semi-continue supérieurement par rapport à l'inclusion[3]), c'est-à-dire s'il existe pour tout $P \epsilon D$ et $\varepsilon > 0$ un $\delta > 0$ tel que l'inégalité $|P, Q| < \delta$ entraîne l'inclusion $M(Q) \subset \mathrm{k}(M(P), \varepsilon)$ pour tout $Q \epsilon D$.

Si tous les pinceaux $M(P)$, où $P \epsilon D$, sont des éléments linéaires, le champ $M(P)$ peut être identifié au champ d'éléments linéaires engendré par un système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{d x_\nu}{d t} = f_\nu(t, x_1, \ldots, x_n), \qquad \nu = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

dont les seconds membres sont continus dans D, car dans ce cas la semi-continuité par rapport à l'inclusion implique évidemment la continuité.

Le champ $M(P)$ sera dit *borné* dans D s'il est contenu dans un champ constant: $M(P) \subset M_0$ pour $P \epsilon D$, il sera dit *gras* si, pour tout $P \epsilon D$, la trace $m(P)$ a des points intérieurs, enfin il sera dit *continu dans* D s'il existe, pour tout $P \epsilon D$ et $\varepsilon > 0$, un $\delta > 0$ tel que l'inégalité $|P, Q| < \delta$ entraîne l'inégalité $|M(P), M(Q)| < \varepsilon$ pour tout $Q \epsilon D$.

Si $M(P)$ est un champ continu et gras dans D, alors Centre $(M(P))$ est un champ d'éléments linéaires (continu)[4]). Un champ défini dans un ensemble D borné et fermé est borné[5]). Si $M(P)$ est un champ défini dans D et $\varepsilon(P)$ une fonction positive et continue dans D, $\mathrm{k}(M(P), \varepsilon(P))$ est encore un champ défini dans D; lorsque $M(P)$ est continu, ce champ l'est aussi.

Si les champs $M_i(P)$ sont définis dans D, alors $M'(P) = \sum\limits_{i=1,\ldots,p} M_i(P)$ est un champ défini dans D. L'agrégat $M''(P) = \operatorname*{Agr}\limits_{i=1,\ldots,p}(M_i(P), \lambda_i(P))$ l'est aussi lorsque les fonctions $\lambda_i(P)$ sont continues et non négatives et $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i(P) > 0$ dans D. La continuité des champs $M_i(P)$ entraîne celle de $M'(P)$ et de $M''(P)$. Le produit

$$M(P) = \prod_{i=1}^{\infty} M_i(P)$$

est un champ dans D si la suite des champs $\{M_i(P)\}$ est décroissante, c'est-à-dire si l'on a

$$M_{i+1}(P) \subset M_i(P) \text{ pour } P \epsilon D \text{ et } i = 1, 2, \ldots$$

---

[3]) Voir [8], p. 75.

[4]) Cela résulte du fait que le centre de gravité d'un ensemble convexe ayant des points intérieurs est une fonction continue de cet ensemble, voir [6], p. 52.

[5]) Les démonstrations omises dans ce chapitre se trouvent dans les travaux cités plus haut [16] et [2].

Si $\{M_i(P)\}$ est une suite décroissante de champs dans D, alors on a

$$(2)\qquad \prod_{i=1}^{p} M_i(P) \subset \operatorname*{Agr}_{i=1,\dots,p}(M_i(P)\,\lambda_i(P)) \subset \widehat{\sum_{i=1,\dots,p}} M_i(P).$$

Lemme 1[6]**.** *Soient D un ensemble ouvert contenu dans E_{n+1}, B et B' deux ensembles contenus dans D et fermés par rapport à D, $M(P)$ un champ défini dans B et $M'(P)$ un champ gras et continu dans B'. Admettons que $M(P) \subset_i M'(P)$ dans $B.B'$; dans ces conditions il existe une suite de champs $\{M_i(P)\}$ continus et gras dans D telle que*

$$M_{i+1}(P) \subset_i M_i(P) \text{ dans } D,$$
$$M(P) \subset M_i(P) \text{ dans } B,$$
$$M_i(P) \subset_i M'(P) \text{ dans } B',$$
$$M^*(P) = \prod_{i=1}^{\infty} M_i(P) \text{ est un champ défini dans } D \text{ et continu dans } D - B,$$
$$M^*(P) = M(P) \text{ dans } B.$$

Ce lemme fournit, pour $B = D$, l'approximation d'un champ donné par une suite décroissante de champs continus, et d'autre part, pour $B \neq D$, le prolongement continu $M^*(P)$ d'un champ donné $M(P)$ au delà de son domaine d'existence.

2. Équations au paratingent

Considérons un ensemble $Z \subset E_{n+1}$ et un point fixe $P \in Z$. Nous appellerons *paratingent de l'ensemble Z au point P* l'ensemble $\mathrm{Pt}(Z, P)$ de toutes les droites l issues du point $(-1, 0, \dots, 0) \in E_{n+1}$ et satisfaisant à la condition suivante: il existe dans l'ensemble Z deux suites de points $\{Q_i\}$ et $\{R_i\}$ convergentes vers le point P, telles que $Q_i \neq R_i$, pour $i = 1, 2, \dots$, et que la suite des droites Q_iR_i converge vers une droite parallèle à l. Nous appellerons *contingent de l'ensemble Z au point P* le sous-ensemble $\mathrm{Ct}(Z, P) \subset \mathrm{Pt}(Z, P)$ que l'on obtient en posant $Q_i = P$ pour tout $i = 1, 2, \dots$ (Cf. [8], p. 65, 72).

Soit $M(P)$ un champ défini dans un ensemble $D \subset E_{n+1}$ et I un arc contenu dans D et représenté par un système d'équations

$$(3)\qquad x_\nu = \varphi_\nu(t), \quad \nu = 1, \dots, n$$

[6]) Cf. [2], p. 55.

dont les seconds membres sont continus dans un intervalle Δ. Il sera commode d'écrire le système d'équations (3) sous la forme abrégée (vectorielle):

(4) $$x = \varphi(t).$$

Nous appellerons *équation au paratingent* la condition

(5) $$\mathrm{Pt}(I, P) \subset M(P) \quad \text{si} \quad P \in I.$$

L'arc I, ou bien un système de fonctions (3) satisfaisant à cette condition, s'appellera *intégrale de l'équation au paratingent* (5) ou *intégrale du champ* $M(P)$[7]. Si $M(P)$ est un champ d'éléments linéaires, l'équation (5) est équivalente à un système d'équations différentielles ordinaires (1), où les fonctions $f_\nu(t, x)$ sont continues dans D.

Les intégrales de l'équation au paratingent ont beaucoup de propriétés analogues à celles des intégrales d'un système d'équations différentielles (1). Nous allons en énoncer quelques unes[8] et fixer la terminologie.

Admettons que l'ensemble D, dans lequel est défini le champ $M(P)$, soit ouvert. Par chaque point $Q \in D$ il passe alors au moins une intégrale du champ $M(P)$ et chaque intégrale peut être prolongée bilatéralement jusqu'à la frontière de D. Une intégrale qui ne peut plus être prolongée s'appellera *saturée*, une telle intégrale est définie dans un intervalle ouvert.

Nous appellerons *demi-intégrale positive issue du point* $P_0 = (t_0, x^0) = (t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ toute intégrale $x = \varphi(t)$ définie dans un intervalle $t_0 \leq t < \beta \leq +\infty$ qui ne peut être prolongée à droite et telle que $x^0 = \varphi(t_0)$. L'ensemble $Z^+(M(P), U, D)$ de tous les points situés sur les demi-intégrales positives issues des points d'un ensemble $U \subset D$ s'appellera *zone d'émission positive de l'ensemble U par rapport au champ $M(P)$ et à l'ensemble D*. Un ensemble $U \subset D$ sera dit *saturé à droite* par rapport à $M(P)$ et D lorsque $U = Z^+(M(P), U, D)$. Nous appellerons *zone d'émission positive* $Z^+(M(P), Q, D)$ *d'un point* $Q \in D$ celle d'un ensemble formé d'un seul point Q. On définit pareillement les notions de *demi-intégrale négative, zone d'émission négative* et *ensemble saturé à gauche*. Deux demi-intégrales, l'une positive et l'autre négative, issues d'un point forment une intégrale saturée passant par celui-ci.

Toutes ces notions sont encore valables dans le cas d'un champ défini dans un ensemble D qui n'est pas ouvert, mais il peut arriver que les ensembles en question soient vides. C'est pourquoi il nous sera commode d'adopter la convention suivante.

[7]) Voir [16] ou bien [17].

[8]) Les démonstrations omises ici se trouvent dans les travaux [16] et [2].

Convention. Si $P_0 \epsilon D$. Front D et s'il n'existe pas de demi-intégrale positive (resp. négative) du champ $M(P)$ issue du point P_0, l'ensemble composé d'un seul point P_0 sera appelé demi-intégrale positive (négative) du champ $M(P)$. En vertu de cette convention la zone d'émission d'un ensemble non vide ne sera jamais vide.

Supposons que, pour $i = 0, 1, 2, \ldots,$ I_i soit un arc continu représenté par l'équation (vectorielle)

$$x = \varphi^i(t)\,, \quad \text{où} \quad a_i \leqslant t \leqslant \beta_i.$$

Nous dirons que la suite $\{I_i\}$ *converge vers* I_0 *presque uniformément dans un intervalle* (a_0, β_0) si, pour tout intervalle $\langle a, \beta \rangle \subset (a_0, \beta_0)$, il existe un entier positif N tel que la suite $\{\varphi^i(t)\}_{i=N, N+1, \ldots}$ converge uniformément vers $\varphi_0(t)$ dans $\langle a, \beta \rangle$.

Cette définition s'applique aussi bien aux cas où la fonction $\varphi_0(t)$ est définie dans un intervalle uni- ou bilatéralement fermé: $(a_0, \beta_0\rangle$, $\langle a_0, \beta_0)$ ou $\langle a_0, \beta_0 \rangle$.

Si les arcs I_i, où $i = 1, 2, \ldots,$ sont des intégrales du champ $M(P)$, l'arc limite I_0 l'est aussi. Soit, en effet,

$$P_0 = (t_0, \varphi^0(t_0)) \epsilon I_0.$$

Pour un $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que

$$M(P) \subset \overline{\mathrm{k}}(M(P_0), \varepsilon) \ \text{dans} \ K = \mathrm{K}(P_0, \delta),$$

car le champ $M(P)$ est semi-continu supérieurement par rapport à l'inclusion. Fixons deux points

$$Q_0 = (u_0, \varphi^0(u_0)) \ \text{et} \ R_0 = (v_0, \varphi^0(v_0)), \ P_0 \neq Q_0 \neq R_0 \neq P_0,$$

tels que $Q_0 \epsilon K.I_0$ et $R_0 \epsilon K.I_0$. De la condition de convergence il s'ensuit qu'il existe un indice N et deux suites de points $\{Q_i\}$ et $\{R_i\}$, où $i = N, N+1, \ldots,$ tels que

$$Q_i \epsilon \mathrm{K}.I_i\,, \quad R_i \epsilon \mathrm{K}.I_i\,, \quad Q_i \neq R_i\,, \quad Q_i \to Q_0\,, \quad R_i \to R_0$$

et que, pour $i = N, N+1, \ldots$ le segment $Q_i R_i$ de l'intégrale I_i soit contenu dans K. Les cordes $Q_i R_i$ ont leurs directions contenues dans le pinceau $\overline{\mathrm{k}}(M(P_0), \varepsilon)$[9]) et il en est de même pour la corde limite $Q_0 R_0$. Il s'ensuit que

$$\mathrm{Pt}\,(I_0, P_0) \subset \overline{\mathrm{k}}(M(P_0), \varepsilon)$$

pour $P_0 \epsilon I_0$ et $\varepsilon > 0$ quelconques, d'où $\mathrm{Pt}\,(I_0, P) \subset M(P)$ pour tout $P \epsilon I_0$.

[9]) Comp. [16] et [17].

Si D' est un ensemble non vide, borné et fermé, contenu dans l'ensemble D, alors toutes les intégrales du champ $M(P)$ contenues dans D' remplissent uniformément la condition de Lipschitz, car dans D' le champ $M(P)$ doit être borné. On en déduit facilement, en s'appuyant sur le théorème d'Arzela, que, *si une suite d'intégrales* $\{I_i\}$ *représentées par les équations*

$$x = \varphi^i(t), \quad \alpha_i \leq t \leq \beta_i, \quad i = 1, 2, \ldots$$

est contenue dans un ensemble fermé et borné $D' \subset D$ *et si*

$$\lim_{i \to \infty} \sup (\beta_i - \alpha_i) > 0,$$

alors il existe une suite partielle $\{I_{i(j)}\}_{j=1,2,\ldots}$ *convergente presque uniformément vers une intégrale* I_0 *du champ* $M(P)$ *contenue dans* D'.

Lorsque B est un ensemble borné et ouvert, contenu dans l'intérieur de l'ensemble ouvert $D \subset E_{n+1}$ et que U est un sous-ensemble fermé de la fermeture $\overline{B}$, il résulte immédiatement de la proposition précédente que la zone d'émission $Z = Z^+(M(P), U, B)$ est fermée et bornée.[10]

Si $M(P) \subset M'(P)$ pour $P \epsilon D$, il est évident que $Z = Z^+(M(P), U, \overline{B}) \subset$ $\subset Z^+(M'(P), U, \overline{B})$. Si les champs $M_i(P)$, où $i = 1, 2, \ldots$, sont définis dans D et satisfont aux conditions $M_{i+1}(P) \subset M_i(P)$ et $M(P) = \prod_{i=1,2,\ldots} M_i(P)$ et si $\varepsilon > 0$ et $\overline{K}(Z, \varepsilon) \subset D$, alors

$$Z^+(M_i(P), U, \overline{B}) \subset K(Z, \varepsilon) . \overline{B}$$

à partir d'un indice i suffisamment grand.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait, pour tout $i = 1, 2, \ldots$, une intégrale I_i:

$$x = \varphi^i(t), \quad \alpha_i \leq t \leq \beta_i$$

du champ $M_i(P)$, contenue dans $\overline{K}(Z, \varepsilon)$ et telle que

$$(\alpha_i, \varphi^i(\alpha_i)) \epsilon U \quad \text{et} \quad (\beta_i, \varphi^i(\beta_i)) \epsilon \overline{B} \cdot F = \overline{B} \cdot \text{Front}(K(Z, \varepsilon)),$$

où F désigne l'ensemble des points frontières de l'ensemble $K(Z, \varepsilon)$. Les I_i seraient évidemment des intégrales du champ $M_1(P)$ et l'on aurait $\beta_i - \alpha_i \geq \varepsilon$. Donc une suite partielle $I_{i(j)}$ convergerait presque uniformément vers une intégrale I_0 du champ $M_1(P)$. Comme les $I_{i(j)}$ seraient les intégrales du champ $M_k(P)$, pour $i(j) \geq k$, l'arc I_0 devrait l'être aussi et, par conséquent, I_0 étant une intégrale de tous les champs $M_k(P)$, elle serait aussi une intégrale du champ $M(P)$, d'où $I_0 \subset Z$. Or, c'est impossible, car l'intégrale I_0 devrait alors joindre les ensembles Z et $F . B$.

[10]) Cf. convention, p. 44

3. Points d'entrée et points de sortie

Admettons l'hypothèse suivante qui sera valable dans tous les raisonnements de la suite.

Hypothèse H_1. *Le champ $M(P)$ est défini dans un ensemble ouvert $\Omega \epsilon E_{n+1}$, l'ensemble B est ouvert et contenu dans Ω.*

Soit

$$\Sigma = \operatorname{Front}(B), \qquad \Phi = \operatorname{Front}(B, \Omega) = \operatorname{Front}(B). \Omega,$$

où $\operatorname{Front}(B)$ désigne la frontière de l'ensemble B et $\operatorname{Front}(B, \Omega)$ la frontière relative de B par rapport à Ω.

Nous allons énoncer quelques définitions relatives à l'allure des intégrales du champ $M(P)$ — nous les appellerons intégrales tout court — dans le voisinage de l'ensemble Φ. Ces définitions ne seront que des modifications de celles introduites par T. Ważewski dans ses recherches sur l'allure asymptotique des intégrales des systèmes d'équations différentielles ordinaires [**14**].

Soit P_0 un point de l'ensemble Φ. Nous dirons qu'une demi-intégrale positive (resp. négative) issue du point P_0 *entre dans* B (resp. *sort de* B) s'il existe un segment de cette demi-intégrale composé du point P_0 et de points de l'ensemble B. Les énoncés: „entre dans $\Omega - B$" ou bien „sort de $\bar{B}$" etc. auront un sens tout à fait analogue. En désignant par I^- (resp. I^+) une demi-intégrale négative (positive) quelconque, issue du point P_0, nous convenons de dire que $P_0 \epsilon \Phi$ est un *point d'entrée* s'il existe une I^+ entrant dans B — un *point de sortie* s'il existe une I^- sortant de B — un *point de glissement intérieur* (*extérieur*) s'il existe un I^+ entrant dans B (resp. dans $\Omega - B$) et une I^- sortant do B (resp. de $\Omega - B$). L'ensemble des points d'entrée sera désigné par le symbole $e(M(P), B, \Omega)$ ou e tout court, les ensembles des points de sortie, de glissement intérieur et de glissement extérieur seront désignés respectivement par s, g^* et g.

Le point $P_0 \epsilon \Phi$ sera dit *point d'entrée* (*de sortie*) *forte* si $P_0 \epsilon e$ et aucune I^- ne sort de B (resp. si $P_0 \epsilon s$ et aucune I^+ n'entre dans B). Les ensembles de tels points seront désignés respectivement par $\tilde{E}$ et $\tilde{S}$, [**4**].

Le point P_0 sera appelé *point de glissement intérieur* (*extérieur*) *strict* si toute I^- sort de B (resp. de $\Omega - B$) et toute I^+ entre dans B (resp. dans $\Omega - B$). Les ensembles correspondants seront désignés par G^* et G.

Enfin, nous appellerons le point $P_0 \epsilon \Phi$ *point d'entrée stricte* (*de sortie stricte*) si l'on a $P_0 \epsilon \tilde{E}$ et si toute I^+ entre dans B (resp. $P_0 \epsilon \tilde{S}$ et toute I^- sort de B). Les ensembles de tels points seront désignés par E et S respectivement[11]).

[11]) Ces définitions ne se recouvrent pas exactement avec les définitions dues à T. Ważewski [**14**], cf. [**4**].

Tout point de sortie stricte est un point de sortie forte, mais la proposition inverse serait en défaut, même dans le cas où tous les points de sortie sont fortes (cf. [4], p. 494).

La classification que nous venons de faire n'est évidemment pas complète. Dans la suite nous exclurons même quelques unes des possibilités déjà discutées.

Convention

Nous admettrons, une fois pour toutes, la convention suivante. L'ensemble Ω étant ouvert, il peut être représenté sous forme d'une somme dénombrable d'ensembles non vides et compacts Ω_i, $i=1,2,\ldots$, remplissant la condition $\Omega_i \subset_i \Omega_{i+1}$ pour tout i. Pareillement on peut admettre que $B=\sum_{i=1}^{\infty} B_i$, où les B_i sont non vides et compacts et $B_i \subset_i B_{i+1}$ pour tout $i=1,2,\ldots$

Lemme 2. *Si tout point d'entrée est un point d'entrée forte, c'est-à-dire si $e=\tilde{E}$, alors l'ensemble $\tilde{E}$ est borelien du type F_σ.*

Démonstration. Soit k un entier positif fixe et désignons par E_k l'ensemble des points Q appartenant à l'ensemble $\tilde{E}$ et satisfaisant à la condition suivante: il existe une intégrale joignant le point Q à un point de l'ensemble B_k et contenue dans $B.\Omega_k$, à l'exception du point Q appartenant à la frontière de B. On a évidemment

$$\tilde{E}=\sum_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Les ensembles E_k sont bornés; nous allons montrer qu'ils sont fermés.

Soit, en effet, pour un indice k fixe, une suite $\{Q_i\}$ de points appartenant à l'ensemble E_k et convergente vers un point $Q \in \Omega$. D'après la définition de l'ensemble E_k il existe, pour tout $i=1,2,\ldots$, une intégrale

$$x=\varphi^i(t), \qquad a^i \leqslant t \leqslant \beta^i$$

telle que

$$(a^i,\varphi^i(a^i))=Q_i, \qquad (\beta^i,\varphi^i(\beta^i)) \in B_k \qquad \text{et} \qquad (t,\varphi^i(t)) \in B.\Omega_k$$

lorsque $a^i < t \leqslant \beta^i$. Nous en extrayons une suite partielle d'intégrales $x=\varphi^{i(j)}(t)$, où $j=1,2,\ldots$, convergente presque uniformément vers une intégrale

$$x=\varphi(t), \qquad a \leqslant t \leqslant \beta$$

et telle que

$$(\beta,\varphi(\beta)) \in B_k, \qquad (a,\varphi(a))=Q=\lim_{j\to\infty} Q_{i(j)} \qquad \text{et} \qquad (t,\varphi(t)) \in \bar{B}.\Omega_k$$

lorsque $a \leqslant t \leqslant \beta$. Désignons par τ la borne supérieure de l'ensemble des nombres t tels que $a \leqslant t \leqslant \beta$ et $(t,\varphi(t))$ n'appartient pas à B. Le point

$Q' = (\tau, \varphi(\tau))$ est un point d'entrée et par suite un point d'entrée forte. Il s'ensuit que $\tau = a$ et $Q' = Q \epsilon E_k$. Nous avons ainsi démontré que l'ensemble E_k est fermé.

Lemme 3. *Si tout point de sortie est un point de sortie stricte et s'il existe, pour tout point $Q \epsilon T = \Phi - S$, une demi-intégrale négative issue du point Q et appartenant localement — dans un voisinage assez petit du point Q — à l'ensemble $\Omega - B$, alors l'ensemble T est un F_σ.*

Démonstration. Désignons, en effet, par T_k un sous-ensemble de T composé des points Q satisfaisant à la condition: Il existe une intégrale $x = \varphi(t)$, $a - 1/k \leqslant t \leqslant a$, contenue dans $\Omega_k - B$ et telle que $(a, \varphi(a)) = Q$. On vérifie sans peine que tous les ensembles T_k, où $k = 1, 2, \ldots$, sont bornés et fermés et que $T = \sum_{k=1}^{\infty} T_k$.

Lemme 4. *Si $s = S$, $e = E$ et $\Phi = S + E + g$, l'ensemble g est un F_σ.*

Démonstration. On procède comme dans la démonstration précédente. On considère l'ensemble g_k des points Q satisfaisant à la condition: il existe une intégrale $x = \varphi(t)$, $a - 1/k \leqslant t \leqslant a + 1/k$, contenue dans $\Omega_k - B$ et telle que $(a, \varphi(a)) = Q$. Cet ensemble est fermé et borné pour tout $k = 1, 2, \ldots$ et $g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$.

L'ensemble E étant un F_σ, la somme $T = E + g$ l'est aussi.

Exemple. Nous allons maintenant construire un exemple d'un système de deux équations différentielles ordinaires tel que l'ensemble T ne soit pas un F_σ. Admettons, dans ce but, que $\Omega = E_{2+1}$ et que $\omega, \Lambda, U, V_{\frac{m}{n}}$, $W_{\frac{m}{n}}, \Gamma_{\frac{m}{n}}$ et W désignent respectivement les ensembles de points déterminés par les conditions suivantes:

(ω) $$x_2 < -t^2,$$

(Λ) $$x_2 = t = 0,$$

(U) $$-1 < x_2 < -t^2, \quad t < 0,$$

$(V_{\frac{m}{n}})$ $$\frac{-1}{n!3} < x_2 < 0, \quad |x_1 - \frac{m}{n}| < |x_2|,$$

$(W_{\frac{m}{n}})$ $$W_{\frac{m}{n}} = V_{\frac{m}{n}} \cdot U,$$

$(\Gamma_{\frac{m}{n}})$ $$x_1 = \frac{m}{n}, \quad t \leqslant 0, \quad x_2 = -2t^2 > -\frac{1}{n!6},$$

(W) $$W = \sum W_{\frac{m}{n}},$$

où m/n désigne partout une fraction irréductible de dénominateur n positif et la dernière somme est étendue à tous les indices rationnels m/n.

On vérifie facilement que les ensembles $W_{\frac{m}{n}}$ sont disjoints deux à deux et que $\Gamma_{\frac{m}{n}} \subset W_{\frac{m}{n}}$, pour toutes les fractions m/n.

Admettons encore qu'une fonction $f(t, x_1, x_2)$ soit continue dans Ω tout entier et possède des dérivées continues du premier ordre dans $\Omega - \Lambda$, et que en outre

$$f(t, x_1, x_2) = \begin{cases} 0 \text{ dans } \Omega - W \\ -4t \text{ sur } \Gamma_{\frac{m}{n}} \end{cases}.$$

On démontre facilement qu'il existe une telle fonction en utilisant p. ex. un théorème de H. Whitney sur l'approximation et le prolongement d'une fonction donnée par des fonctions analytiques dans un ensemble ouvert [15].

Ceci posé, envisageons le système d'équations différentielles

$$\frac{dx_1}{dt} = 0, \quad \frac{dx_2}{dt} = f(t, x_1, x_2).$$

Il est clair qu'en dehors de l'axe Λ les intégrales de ce système remplissent la condition d'unicité et que toute intégrale saturée à droite aboutit à la frontière de l'ensemble ω, si elle passe par un point de l'ensemble ω. Il est aussi évident que tout point de sortie par rapport au système d'équations envisagé et aux ensembles ω et Ω est un point de sortie forte (et de sortie stricte à l'exception des points de sortie sur l'axe Λ). L'ensemble de points de sortie $\widetilde{S}$ contient les points rationnels de l'axe Λ et tous les points de la surface

$$t > 0, \quad x_2 = -t^2.$$

L'ensemble $T = \text{Front}(\omega, \Omega) - \widetilde{S}$ se compose de points $(t, x_1, -t^2)$, où $t < 0$ lorsque x_1 est un nombre rationnel et $t \leqslant 0$ lorsque x_1 est un nombre irrationnel. L'ensemble T n'est donc pas un F_σ.

Dans la démonstration il est à remarquer qu'il n'existe que trois espèces d'intégrales: 1° les droites parallèles à l'axe des t, 2° les intégrales sortant de ω par les points rationnels de Λ, 3° celles qui rencontrent n'importe lequel des ensembles $W_{\frac{m}{n}}$ et, après l'avoir quitté, se prolongent parallèlement à l'axe de t dans le demi-espace $x_2 < 0$.

4

4. Intégrales asymptotiques

Nous adopterons encore une notion due à T. Ważewski [14], à savoir celle de *demi-intégrale asymptotique positive*, c'est-à-dire une demi-intégrale positive du champ $M(P)$ envisagé dans Ω tout entier, saturée par rapport à Ω et contenne dans l'ensemble B. L'ensemble des points appartenant aux demi-intégrales asymptotiques positives sera désigné par $A^+(M(P), B, \Omega)$ ou par A^+ tout court.

Il nous sera commode d'admettre une nouvelle hypothèse qui interviendra dans tous les raisonnements de ce chapitre et dans le chapitre suivant.

Hypothèse H_2. *Tout point de sortie est un point de sortie forte, c'est-à-dire* $s = \tilde{S}$.

Lemme 5. *Dans les hypotheses* H_1 *et* H_2 *l'ensemble* A^+ *est fermé par rapport à* ω.

Démonstration. Supposons que $P_i \in A^+$ pour $i = 1, 2, \ldots$ et $\lim_{i \to \infty} P_i = P_0 \in \omega$. Pour tout i il existe une demi-intégrale I_i asymptotique à droite:

$$x = \varphi^i(t), \qquad \alpha^i \leqslant t < \beta^i \leqslant +\infty,$$

telle que $(\alpha^i, \varphi^i(\alpha^i)) = P_i$. Soit m un indice tel que pour tout $i = 1, 2, \ldots$, $P_i \in \Omega_m$. Pour tout $l = m, m+1, m+2, \ldots$, il existe une suite partielle de demi-intégrales

$$x = \varphi^{i(j)}(t)$$

qui converge dans Ω_l presque uniformément vers une intégrale issue du point P_0 et aboutissant à la frontière de Ω_l. En utilisant la méthode de la suite diagonale on peut définir une suite partielle de demi-intégrales

$$x = \varphi^{\lambda(j)}(t), \qquad \alpha^{\lambda(j)} \leqslant t < \beta^{\lambda(j)}, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

corvergente presque uniformément vers une demi-intégrale I_0:

$$x = \varphi^0(t), \qquad \alpha^0 \leqslant t < \beta^0$$

issue du point P_0. Cette demi-intégrale est saturée à droite et contenue dans $\bar{B}$. Si elle avait un point commun avec la frontière relative Φ, ce point devrait être, d'après H_2, un point de sortie forte et I_0 pénétrerait dans l'intérieur de l'ensemble $\Omega - B$. La demi-intégrale I_0 issue du point limite P_0 est donc asymptotique à droite et notre lemme est ainsi démontré.

Admettons encore l'hypothèse suivante.

Hypothèse H_3. *Il n'existe pas de demi-intégrales asymptotiques à droite.*

Posons

$$Z_i^+ = Z^+(M(P), B_i, \bar{B}), \qquad S_i = \Phi \cdot Z_i^+$$

où $\bar{B}$ désigne la fermeture relative de l'ensemble B par rapport à l'ensemble Ω. On constate sans peine, en appliquant l'hypothèse H_2, que $\widetilde{S}=\sum_{i=1}^{\infty} S_i$. Nous allons montrer que les ensembles Z_i^+ sont bornés et fermés. Fixons, en effet, l'indice i et supposons que Z_i^+ ne soit pas contenu dans Ω_j pour $j=1,2,\ldots$ Il existerait alors une suite d'intégrales I_j:

$$x=\varphi^j(t), \quad \alpha^j \leqslant t \leqslant \beta^j, \quad j=1,2,\ldots$$

contenues dans $\bar{B}$ et satisfaisant aux conditions:

$$Q_j=(\alpha^j, \varphi^j(\alpha^j)) \in B_i, \qquad R_j=(\beta^j, \varphi^j(\beta^j)) \in \operatorname{Front}(\Omega^j).$$

En utilisant le procédé de la suite diagonale nous pouvons en extraire une suite partielle d'intégrales $I_{\lambda(j)}$ convergente presque uniformément vers une intégrale issue d'un point de l'ensemble B_i, saturée à droite par rapport à Ω et contenue dans $\bar{B}$. En vertu de l'hypothèse H_2 celle-ci ne peut pourtant pas passer par des points de l'ensemble Φ. Donc $I_0 \subset B$. Mais ceci est impossible, car nous avons exclu les demi-intégrales asymptotiques à droite. Nous avons ainsi démontré que, pour tout $i=1,2,\ldots,$ il existe un $j(i)$ tel que $Z_i^+ \subset \Omega_{j(i)}$.

Les ensembles Z_i^+ étant bornés, il est déjà évident qu'ils doivent être fermés. Or

$$S_i=\Phi\cdot Z_i^+=(\Omega\cdot\Sigma)\cdot Z_i^+=\Sigma\cdot(\Omega\cdot Z_i^+)=\Sigma\cdot Z_i^+$$

et, par suite, les S_i sont des ensembles compacts.

Nous avons ainsi démontré le lemme suivant.

Lemme 6. *Dans les hypothèses* H_1, H_2 *et* H_3 *les ensembles* Z_i^+ *et les ensembles* $S_i=Z_i^+\cdot\Phi$ *sont bornés et fermés pour* $i=1,2,\ldots,$ $\widetilde{S}=\sum_{i=1}^{\infty} S_i$ *et il existe une suite d'indices* $\{j(i)\}$ *telle que* $Z_i^+ \subset \Omega_{j(i)}$; $S_i \subset S_{i+1}$, $i=1,2,\ldots$

R e m a r q u e. Il s'ensuit que l'ensemble S est un F_σ (cf. lemme 2).

5. Théorèmes sur la régularisation du champ $M(P)$

Théorème 1. *Si les hypothèses* H_1, H_2 *et* H_3 *sont remplies et si l'ensemble* $T=\Phi-\widetilde{S}$ *est un ensemble borelien* F_σ, *il existe un champ* $M'(P)$ *défini dans* Ω *et satisfaisant aux conditions suivantes:*

1° $M'(P)=M(P)$ *dans* $\Omega-B$,
2° $M'(P)$ *est continu et gras dans* B,
3° $M(P)\subset M'(P)$ *dans* B,
4° *il n'existe pas de demi-intégrales asymptotiques à droite du champ* $M'(P)$ *par rapport aux ensembles* B *et* Ω,
5° $s(M'(P),B,\Omega)=\widetilde{S}(M'(P),B,\Omega)=\widetilde{S}(M(P),B,\Omega)=\widetilde{S}$
6° $e(M'(P),B,\Omega)\subset T$.

Démonstration. Admettons que l'ensemble T soit la somme des ensembles compacts T_k, où $k=1,2,\ldots$, et que $T_k \subset T_{k+1}$. D'après le lemme 1 (Chap. 1) il existe une suite décroissante $\{M_j(P)\}$ de champs gras et continus dans Ω telle que $M(P)=\prod_{j=1}^{\infty} M_j(P)$. Nous allons construire une suite d'entiers positifs $\{p(i)\}$, $i=1,2,\ldots$, telle que

$$\alpha)\quad p(i+1)>p(i)\geq i,$$

$$\beta)\quad Z^+(M_{p(i)}(P), B_i, \bar{B}) \subset \Omega_{p(i)} - T_i \subset \Omega - T_i,$$

$$\gamma)\quad Z^+(M_{p(i)}(P), S_i, \bar{B}) \subset \bar{B} - B_i .$$

Dans ce but, admettons que l'on ait déjà défini les $p(i)$ pour $i=1,2,\ldots, m-1$, et choisissons un $\varepsilon>0$ assez petit pour que les ensembles T_m et $W=\bar{K}(Z_m^+, \varepsilon)$, où $Z_m^+ = Z^+(M(P), B_m, \bar{B})$, soient disjoints, (cf. lemme 6) Soit $U_j = Z^+(M_j(P), B_m, W\cdot\bar{B})$.

Supposons que, pour tout $j=1,2,\ldots$, il existe une intégrale I_j du champ $M_j(P)$:

$$x=\varphi^j(t), \quad \alpha^j \leq t \leq \beta^j,$$

contenue dans $W\cdot\bar{B}$ et telle que

$$(\alpha^j, \varphi^j(\alpha^j)) \in B_m \ \text{ et } \ (\beta^j, \varphi^j(\beta^j)) \in \text{Front}\ (W).$$

Les intégrales I_j, étant intégrales du champ $M_1(P)$, remplissent uniformément la condition de Lipschitz, puisque l'ensemble $W\cdot\bar{B}$ est compact. On peut donc en extraire une suite partielle $\{I_{j(\lambda)}\}$, $\lambda=1,2,\ldots$, ayant un arc limite I_0:

$$x=\varphi^0(t), \quad \alpha^0 \leq t \leq \beta^0$$

contenu dans W et satisfaisant aux conditions

$$(\alpha^0, \varphi^0(\alpha^0)) \in B_m, \quad (\beta^0, \varphi^0(\beta^0)) \in \text{Front}\ (W).$$

Remarquons que les I_j étant, pour $j\geq p$, des intégrales du champ $M_p(P)$, l'arc I_0 en est aussi une. Mais p est arbitraire, il en résulte que I_0 est une intégrale du champ $\prod_{p=1}^{\infty} M_p(P) = M(P)$ et ceci entraîne l'inclusion $I_0 \subset Z_m^+$. Par conséquent l'arc I_0 ne peut pénétrer jusqu'à la frontière de W. Nous sommes ainsi amenés à une contradiction. Il existe donc un indice r tel que l'ensemble U_r est contenu dans l'intérieur de l'ensemble W, ce qui entraîne l'identité

$$U_r = Z^+(M_r(P), B_m, \bar{B}),$$

d'où

$$Z^+(M_j(P), B_m, \bar{B}) \subset W \subset \Omega_j - T_m$$

pour des valeurs de $j\geq r$.

Prenons maintenant un indice l assez grand pour que l'on ait $S_m \underset{l}{\subset} \Omega_l$ et $B_m \underset{l}{\subset} \Omega_l$, et supposons que, pour tout $j = 1, 2, \ldots$, il existe une intégrale J_j

$$x = \psi^j(t), \quad \gamma^j \leqslant t \leqslant \delta^j$$

du champ $M_j(P)$, contenue dans $\bar{B}$ et telle que

$$Q_j = (\gamma^j, \psi^j(\gamma^j)) \in S_m \text{ et } (\delta^j, \psi^j(\delta^j)) \in B_m .$$

Si l'arc J_j n'était pas contenu dans Ω_l, nous le remplacerions par son segment qui joint dans Ω_l le point Q_j à la frontière de Ω_l. De même qu'auparavant nous en tirons une suite partielle $J_{j(\lambda)}$ ayant un arc limite

$$x = \psi^0(t), \quad \gamma^0 \leqslant t \leqslant \delta^0$$

qui ne se réduit pas à un point et qui est une intégrale du champ $M(P)$, contenue dans $\bar{B}$. De plus $(\gamma^0, \psi^0(\gamma^0)) \in S_m$, ce qui contredit l'hypothèse H_2. Il existe donc un indice r' tel que les ensembles $Z^+(M_j(P), S_m, \bar{B})$ et B_m sont disjoints pour $j \geqslant r'$.

Posons

$$p(m) = \max(p(m-1)+1, r, r');$$

les conditions $\alpha), \beta)$ et $\gamma)$ seront remplies pour $i = m$.

La suite $\{p(i)\}$ étant déjà construite, nous admettons que

$$M'(P) = \begin{cases} M(P) \text{ dans } \Omega - B, \\ \underset{i=1,2,\ldots}{\mathrm{Agr}} \; (M_{p(i+1)}(P), \lambda_i(P)) \text{ dans } B, \end{cases}$$

où $\lambda_i(P)$ sont des fonctions continues et non négatives dans $B, \lambda_i(P) > 0$ dans $B_i - B_{i-1}, \lambda_i(P) = 0$ dans $B_{i-1} + (\Omega - B_{i+1})$ et B_0 désigne l'ensemble vide. On aura évidemment

$$M(P) \subset M'(P) \subset M_{p(i)}(P) \tag{6}$$

dans $B - B_i$, pour $i = 1, 2, \ldots$, et les conditions $1^\circ - 3^\circ$ seront remplies, mais on doit encore montrer que $M'(P)$ ainsi défini est semi-continu supérieurement par rapport à l'inclusion dans Ω. Il suffit de le démontrer pour un point $P_0 \in \Phi$.

Soit, en effet, $\varepsilon > 0$. Il existe un indice i tel que

$$M_i(P_0) \subset \bar{k}(M(P_0), \varepsilon/2)$$

et un $\delta > 0$ tel que

$$M'(P) \subset M_i(P) \subset \bar{k}(M_i(P_0), \varepsilon/2) \text{ si } |P, P_0| < \delta$$

d'où

$$M'(P) \subset \mathrm{k}(M(P_0), \varepsilon) = \mathrm{k}(M'(P_0), \varepsilon) \text{ si } |P, P_0| < \delta .$$

La condition 4° résulte du fait que toute demi-intégrale positive du champ $M'(P)$ contenue dans B doit passer par un certain point de l'un des ensembles B_i, de l'inclusion (6) et de la condition β).

Nous allons vérifier la proposition 5°. Soit

$$P_0 = (t_0, x^0) \epsilon s(M'(P), B, \Omega).$$

Il existe une intégrale $x = \varphi(t)$, $a \leqslant t \leqslant t_0$, du champ $M'(P)$ telle que $\varphi(t_0) = x^0$ et $(t, \varphi(t)) \epsilon B$ pour $a \leqslant t < t_0$. Il existe donc un indice i_0 tel que $(a, \varphi(a)) \epsilon B_i$ pour $i \geqslant i_0$. Il s'ensuit que l'intégrale $x = \varphi(t)$ est contenue, pour $i \geqslant i_0$, dans $Z^+(M'(P), B_i, \bar{B})$ et, en vertu de la condition β), cette intégrale est contenue dans $\Omega - T_i$, d'où $P_0 \epsilon \Phi - T_i$ pour $i \geqslant i_0$, mais

$$T_i \subset T_{i+1}, \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, \text{ et } T = \sum_{i=1}^{\infty} T_i,$$

donc $P_0 \epsilon \widetilde{S}(M(P), B, \Omega)$. Nous avons ainsi démontré que $s(M'(P), B, (\Omega) \subset \widetilde{S}$, l'inclusion inverse est une conséquence immédiate de la propriété 3° du champ $M'(P)$. On a donc

$$s(M'(P), B, \Omega) = \widetilde{S}.$$

Nons montrerons encore que $P_0 = (t_0, x^0) \epsilon \widetilde{S}$ est un point de sortie forte par rapport au champ $M'(P)$. En effet, s'il existait une intégrale $x = \psi(t)$, où $t_0 \leqslant t \leqslant \beta$, telle que $\psi(t_0) = x_0$ et $(t, \psi(t)) \epsilon B$ pour $t_0 < t \leqslant \beta$, alors deux cas pourraient se présenter:

Premier cas. Il existe un β' tel que $t_0 < \beta' \leqslant \beta$ et $(t, \psi(t)) \epsilon \Phi \subset \Omega - B$ pour $t^0 \leqslant t \leqslant \beta'$.

Deuxième cas. L'intégrale $x = \psi(t)$ a des points communs avec les ensembles B_i pour i suffisamment grand.

Or, dans le premier cas, l'intégrale $x = \psi(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \beta'$ serait une intégrale du champ $M(P)$, contrairement à l'hypothèse H_2. Dans le second cas l'intégrale $x = \psi(t)$ ne pourrait pas, en vertu de γ), être issue d'un point appartenant à S_i, lorsque i était trop grand. D'autre part

$$S_i \subset S_{i+1}, \text{ pour } i = 1, 2, \ldots$$

donc P_0 ne pourrait appartenir à l'ensemble $\widetilde{S} = \sum_{i=1}^{\infty} S_i$. Tous les deux cas étant exclus, le point P_0 doit être un point de sortie forte.

Il reste à vérifier que la condition 6° est remplie. Supposons donc que

$$P_0 = (t_0, x^0) \epsilon e(M'(P), B, \Omega).$$

La demi-intégrale positive issue du point P_0 doit rencontrer les ensembles B_i pour i suffisamment grand. En utilisant la condition γ) on constate sans peine que le point P_0 n'appartient pas aux ensembles S_i pour des valeurs suffisamment grandes de i. Il en résulte que $P_0 \epsilon \Phi - \widetilde{S} = T$.

Nous avons ainsi achevé la démonstration du théorème 1.

Corollaire. On peut remplacer dans l'énoncé du théorème 1 l'hypothèse que T est un F_σ par les conditions suffisantes du lemme 3 ou bien par l' hypothèse: $s = S$, $e = E$ et $\Phi = S + E + g$ du lemme 4 (Chap. 3, p. 48).

Théorème 2[11]**.** *Dans les hypothèses du théorème précédent il existe un champ $M''(P)$ tel que*

1' $M''(P) = M(P)$ *dans* $\Omega - B$,

2' $M''(P)$ *est un champ d'éléments linéaires analytique*[12]*) dans* B,

3' *l'ensemble* $A^+(M''(P), B, \Omega)$ *est vide,*

4' $s(M''(P), B, \Omega) = \widetilde{S}(M''(P), B, \Omega) \subset \widetilde{S}(M(P), B, \Omega)$,

5' $e(M''(P), B, \Omega) \subset T$.

D é m o n s t r a t i o n. Posons[13])

$$M^*(P) = \text{Centre}\,(M'(P)) \text{ dans } B$$

et désignons par $\varepsilon(P)$, où $P \epsilon B$, le nombre maximum tel que

$$\bar{k}(M^*(P), \varepsilon(P)) \subset M'(P)$$

Le champ $M^*(P)$ et la fonction $\varepsilon(P)$ étant continus dans B, il existe **[15]** dans B un champ analytique d'éléments linéaires $M^{**}(P)$ tel que

$$M^{**}(P) \subset k(M^*(P), \varepsilon(P)) \subset M'(P) \text{ dans } B.$$

Posons

$$M''(P) = \begin{cases} M^{**}(P) \text{ dans } B, \\ M(P) \text{ dans } \Omega - B. \end{cases}$$

$M'(P)$ étant contenu dans $M'(P)$ est un champ dans Ω.

La vérification des conditions 3', 4' et 5' est immédiate.

6. Applications du théorème 2

Hypothèse H₄. *Le champ $M(P)$ est défini dans un ensemble ouvert $\Omega \epsilon E_{n+1}$. L'ensemble ouvert ω est contenu dans Ω. L'ensemble U est contenu dans $\omega' = \omega + s(M(P), \omega, \Omega)$ et il est fermé par rapport à cet ensemle: $A^+(M(P), \omega, \Omega) \subset U$; U est saturé à gauche par rapport au champ $M(P)$ et à l'ensemble ω';*

[11]) Dans le cas particulier où $M(P)$ est un champ d'éléments linéaires, on peut obtenir ce resultat plus facilement, cf. [5].

[12]) c'est-à-dire représenté par des fonctions analytiques des variables $t, x_1, x_2, \dots, x_n$.

[13]) Cf. chap. 1, p. 40 et 41.

$$B = \omega - U\,,$$
$$s(M(P), B, \Omega) = \widetilde{S}(M(P), B, \Omega) = \widetilde{S}\,,$$
$$\Phi = \text{Front}\,(B, \Omega)\,,$$
$$T = \Phi - \widetilde{S} \text{ est un } F_\sigma\,,$$

Les hypothèses H_1, H_2, et H_3 sont contenues dans H_4. L'ensemble B est évidemment ouvert. Nous pouvons donc appliquer le théorème 2 aux ensembles B et Ω et au champ $M(P)$. Nous conserverons les notations du chapitre précédent.

Soit Q un point de l'ensemble B. Il existe une seule intégrale $x = \varphi(t)$, $a \leqslant t \leqslant \beta$, du champ $M''(P)$ telle que

$$(a, \varphi(a)) = Q,\ R = (\beta, \varphi(\beta)) \in \widetilde{S} \text{ et } (t, \varphi(t)) \in B$$

lorsque $a < t < \beta$. Admettons, en outre, que $R = Q$ lorsque $Q \in \widetilde{S}$. Le point R, bien déterminé pour tout $Q \in B + \widetilde{S}$, sera dit *conséquent* de Q par rapport au champ $M''(P)$ et aux ensembles B et Ω, en symbole

$$R = \text{Conséq}\,(Q, M''(P), B, \Omega) = C(Q)\ {}^{14)}.$$

Lemme 9. *La fonction $C(Q)$ est continue dans $B + \widetilde{S}$.*

Démonstration. Soit $Q_0 = \lim\limits_{i \to \infty} Q_i$ et $Q_i \in B + \widetilde{S}$, où $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Il s'agit de prouver que $\lim\limits_{i \to \infty} C(Q_i) = C(Q_0)$. Désignons, pour $i = 0, 1, 2, \ldots$, par I_i une intégrale

$$x = \varphi^i(t), \quad a^i \leqslant t \leqslant \beta^i$$

telle que

$$(a^i, \varphi^i(a^i)) = Q_i,\ (\beta^i, \varphi^i(\beta^i)) = C(Q_i) \text{ et } (t, \varphi^i(t)) \in B$$

lorsque $a^i < t < \beta^i$. Si $Q_i \in \widetilde{S}$, alors I_i se réduit à un seul point Q_i. Remarquons d'abord que toutes ces intégrales sont contenues dans un Ω_k pour un indice k suffisamment grand[15]) et fixons un tel indice. On vérifie ensuite que, $\{I_{i(\lambda)}\}$, $\lambda = 1, 2, \ldots$, étant une suite partielle quelconque, on peut en extraire encore une suite $\{I_{i(\lambda(\mu))}\}$, où $\mu = 1, 2, \ldots$, convergente presque uniformément vers une intégrale I' du champ $M''(P)$ (elle peut se réduire à un seul point) joignant le point Q_0 à un point $R' \in \Phi$. On a évidemment $I' \subset \overline{B} \cdot \Omega_k$. Si I' se réduit à un seul point, alors $I' = Q_0 \in \widetilde{S}$. Sinon, l'intégrale I' est, en vertu de l'hypothèse H_2, contenue dans B à l'exception du point R'. Mais ceci entraîne les identités $I' = I_0$, $R' = C(Q_0)$,

$$\lim_{\mu \to \infty} C(Q_{i(\lambda(\mu))}) = C(Q_0)$$

et la fonction $C(Q)$ est bien continue pour tout $Q \in B + \widetilde{S}$.

14) Voir [14], p. 291.

15) Cf. la démonstration du lemme 6, p. 51.

Théorème 3. *Dans l'hypothèse* H_1 *l'ensemble* $\tilde{S}$ *est un rétracte par déformation quasi-isotope de l'ensemble* $B+\tilde{S}$ *dans* $B+\tilde{S}$ [16]).

Démonstration. Soit $x=\varphi(t)$, $a\leqslant t\leqslant\beta$, une intégrale du champ $M''(P)$ joignant dans $B+\tilde{S}$ le point $Q=(a,\varphi(a))$ à son conséquent $R=(\beta,\varphi(\beta))$. Posons

$$H(Q,\Theta)=(a+\Theta(\beta-a),\varphi(a+\Theta(\beta-a))),\quad \text{où } 0\leqslant\Theta\leqslant 1.$$

La fonction $H(Q,\Theta)$ est évidemment continue dans $(B+\tilde{S})\times\langle 0,1\rangle$ et elle satisfait aux conditions suivantes

$$H(Q,0)=Q \text{ pour } Q\in B+\tilde{S},$$
$$H(Q,\Theta)=Q \text{ pour } Q\in\tilde{S},\ 0\leqslant\Theta\leqslant 1,$$
$$H(Q,1)=C(Q)\in\tilde{S} \text{ pour } Q\in B+\tilde{S},$$

si l'on fixe un ϑ tel que $0\leqslant\vartheta<1$, la fonction $H(Q,\vartheta)$ de la variable Q est une homéomorphie qui transforme l'ensemble $B+\tilde{S}$ en un ensemble contenu dans $B+\tilde{S}$. La fonction $H(Q,\Theta)$ remplit donc toutes les conditions de la définition donnée par A. Pliś [13] et $\tilde{S}$ est un rétracte par déformation quasi-isotope de l'ensemble $B+\tilde{S}$.

Théorème 4 [17]). *Dans l'hypothèse* H_4, *si* u *est un ensemble contenu dans* $B+\tilde{S}$ *et si* $u.\tilde{S}$ *est un rétracte* [7] *de* $\tilde{S}$, *alors* $u.\tilde{S}$, *est un rétracte de* u.

Démonstration. Soit $\varrho(R)$ une fonction rétractant $\tilde{S}$ en $u.\tilde{S}$; alors $\varrho(C(Q)$ est une fonction rétractant u en $u.\tilde{S}$.

Corollaires et remarques. Soit $M(P)$ un champ défini dans un ensemble ouvert $\Omega\subset E_{n+1}$ contenant un ensemble ouvert ω, soit $s=s(M(P),\omega,\Omega)$, $\omega'=\omega+s$ et supposons qu'un ensemble $s''\subset s$ soit fermé par rapport à s, que l'ensemble Front $(\omega,\Omega)-s$ soit un F_σ et que l'ensemble $s'=s-s''$ soit non vide et contenu dans $\tilde{S}(M(P),\omega,\Omega)$. Posons

$$\Omega'=\Omega-s'',\ \text{et } U=A^+(M(P),\omega,\Omega)+Z^-(M(P),s'',\omega').$$

Ceci étant, on démontre sans peine que $\omega.U=\omega.A^+(M(P),\omega,\Omega')$. En vertu du lemme 5 (chap. 4, p. 50) l'ensemble $\omega.U$ est fermé par rapport à ω et il s'ensuit que l'ensemble $B=\omega-U\subset\omega$ est ouvert tandis que l'ensemble U est contenu dans ω' et fermé par rapport à ω'. Nous voyons ainsi que l'hypothèse H_4 est remplie dans ce cas.

---

[16]) Cf. [13], p. 416. Notre théorème n'est qu'une modification du théorème de A. Pliś sur les rétractes; cf. [11], p. 75.

[17]) C'est une modification d'un théorème dû à T. Ważewski [14], la méthode de la démonstration est la même.

Supposons que u est un ensemble contenu dans ω' et tel que $u \cdot s'$ est un rétracte de s' mais $u \cdot s'$ n'est pas un rétracte de u. Alors, en vertu du théorème 4, il existe une intégrale du champ $M(P)$ issue d'un point de $u \cdot \omega$ et aboutissant en un point de l'ensemble s'' ou bien asymptotique à droite. Si u n'a pas de points communs avec de demi-intégrales aboutissant à l'ensemble s'' et les intégrales asymptotiques par rapport à $M(P)$, ω et Ω, l'ensemble s' est un rétracte par une déformation quasi-isotope de l'ensemble $u + s'$ (théorème 3).

On peut donner ainsi aux théorèmes 3 et 4 une forme analogue à celle des théorèmes de A. Pliś |13| et de T. Ważewski (|14|, p. 299), mais les domaines de validité des nouveaux théorèmes ne se recouvrent que partiellement avec les domaines de validité des théorèmes cités. Ici les équations sont plus générales, là il n'y a pas de restrictions au sujet de la structure des ensembles T et s'.

Ces restrictions étaient indispensables dans les démonstrations, mais la question se pose s'il était possible de s'en débarasser en utilisant d'autres méthodes de démonstration. En particulier est-il indispensable d'admettre que l'ensemble T soit un F_σ? La réponse ne semble pas simple, et on se heurte déjà à des difficultés essentielles dans le cas d'un système d'équations différentielles ordinaires si l'on n'impose pas la condition d'unicité des solutions.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Albrecht F., *Remarques sur un théorème de T. Ważewski relatif à l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles.* Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 2 (1954), p. 315.

[2] Bielecki A., *Sur certaines conditions nécessaires et suffisantes pour l'unicité des solutions des systèmes d'équations différentielles ordinaires et des équations au paratingent.* Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sectio A, 2, 2 (1948), p. 49.

[3] —— *Pewien warunek konieczny i dostateczny jednotliwości układów równań różniczkowych zwyczajnych.* Ann. Soc. Polon Math. 21 (1950), Suppl. *Sprawozdanie z V Zjazdu Matematyków Polskich.*

[4] —— *Remarques sur la méthode de T. Ważewski dans l'étude qualitative des équations différentielles ordinaires.* Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 4, 8 (1956), p. 493—495.

[5] —— *Sur une méthode de régularisation des équations différentielles ordinaires dont les intégrales ne remplissent la condition d'unicité.* Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 4, 8 (1956), p. 497—501.

[6] Bonnesen T., et Fenchel W., *Theorie der konvexen Körper,* Ergebn. der Math., Berlin (1934).

[7] Borsuk K., *Sur les rétractes.* Fund. Math. 17 (1931), p. 153.

[8] Bouligand G., *Introduction à la géométrie infinitésimale directe.* Paris (1942).

[9] Hartman P. et Wintner A., *Asymptotic integrations of ordinary non-linear differential equations*. Americ. Journ. of Math., **77**, 4 (1955), p. 692.

[10] Hausdorff F., *Grundzüge der Mengenlehre* Leipzig (1914).

[11] Kuratowski K., *Topologie*, II éd., Varsovie–Wrocław (1948), p. 75.

[12] Marchaud A., *Sur les champs de demi-cones et les équations différentielles du premier ordre*. Bull. Soc. Math. de France, **52** (1934), p. 11.

[13] Pliś A., *On a topological method for studying the behaviour of the integrals of ordinary differential equations*. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **2** (1954), p. 416.

[14] Ważewski T., *Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires*. Ann. Soc. Polon. Math., **20** (1947), p. 279—313.

[15] Whitney H., *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets*. Trans. Americ. Math. Soc. **36** (1934), p. 76.

[16] Zaremba S. K., *O równaniach paratyngensowych* (en polonais). Ann. Soc. Polon. Math., Suppl. **9** (1935).

[17] ——— *Sur les équations au paratingent*. Bull. Sci. Math. **60**, 2 (1936), p. 139—160.

[18] ——— *Sur certaines familles de courbes en relation avec la théorie des équations différentielles*. Ann. Soc. Polon. Math., **15** (1936), p. 83—100.

Streszczenie

Uogólnieniem daleko idącym, lecz naturalnym, równań różniczkowych zwyczajnych są równania paratyngensowe [**16**, **17**, **18** a także **12**], będące w istocie rzeczy pewną odmianą zwyczajnych nierówności różniczkowych. Rozwiązania równań paratyngensowych, zwane tu całkami, mają wiele własności całek układów równań różniczkowych zwyczajnych (por. także [**2**]), dzięki czemu można przenieść na teren równań paratyngensowych — w odpowiednio przystosowanej formie — metodę „retraktową" T. Ważewskiego badania przebiegu całek [**14**] i jej późniejsze modyfikacje i odmiany [**1**, **13**]. Umożliwiają to podstawowe w tej pracy twierdzenia 1 i 2 (rozdz. 5) o regularyzacji pola $M(P)$ odpowiadającego danemu równaniu paratyngesowemu *). Twierdzenie 2 ma treść następującą:

Zakładamy, że pole $M(P)$ jest określone w otwartym podzbiorze Ω przestrzeni $(n+1)$ — wymiarowej, zawierającym w sobie zbiór otwarty B, Φ jest brzegiem B ze względu na Ω, nie istnieją całki pola $M(P)$ prawostronnie asymptotyczne względem B i Ω, oraz każdy punkt wyjścia — ze względu na $M(P)$, B i Ω — jest punktem wyjścia *mocnym*; $\tilde{S}$ oznacza zbiór takich właśnie punktów. Zakładamy ponadto,**) że zbiór $T = \Phi - \tilde{S}$ jest zbiorem borelowskim F_σ.

*) Por. n. p. [2], str. 96—98.

**) Założenie to, niezbędne przy stosowanej w pracy metodzie dowodu, można zastąpić pewnymi silniejszymi lecz bardziej intuicyjnymi założeniami charakteryzującymi przebieg całek pola $M(P)$ w otoczeniu punktów brzegu Φ (lemat 2, 3 lub 4, rozdz. 3).

Przy tych założeniach istnieje pole $M''(P)$ określone w obszarze Ω i spełniające warunki:

1′ $M''(P) = M(P)$ w $\Omega - B$,

2′ $M''(P)$ jest polem elementów liniowych, analitycznym w B,

3′ niema całek pola $M''(P)$ asymptotycznych na prawo ze względu na B i Ω,

4′ wszystkie punkty wyjścia ze względu na $M''(P)$, B i Ω są mocne i są równocześnie punktami wyjścia (mocnymi) ze względu na pole $M(P)$ i te same zbiory,

5′ wszystkie punkty wejścia ze względu na $M''(P)$, B i Ω należą do T.

Całki asymptotyczne zostały określone tak, jak w |14|, punkt $P_0 = (t_0, x^0)$ należący do Φ nazywa się punktem wyjścia (|14| str. 292), jeżeli istnieje całka $x = \varphi(t)$, $a \leqslant t \leqslant t_0$, taka że $\varphi(t_0) = x_0$ i $(t, \varphi(t)) \epsilon B$, gdy $a \leqslant t < t_0$ — punktem wyjścia *mocnym*, gdy oprócz tego nie istnieje całka wychodząca z punktu P_0 na prawo $(t \geqslant t_0)$ zawarta w domknięciu $\overline{B}$.

Otrzymane przy pomocy twierdzenia 2 dalsze twierdzenia 3 i 4 (rozdz. 6) nie są, ściśle rzecz biorąc, uogólnieniem twierdzeń T. Ważewskiego i A. Plisia (|14| tw. 1 i |13|) gdyż wprowadzają dodatkowe założenia o strukturze topologicznej występujących tam zbiorów, nie mniej jednak rozszerzają zakres możliwych zastosowań metody retraktowej na dziedzinę, bardzo obszerną, równań paratyngensowych, obejmujących jako przypadek szczególny układy równań różniczkowych zwyczajnych, których całki nie muszą spełniać warunku jedyności.

Резюме

Далеко идущим, но естественным обобщеинем обыкновенных дифференциальных уравневий являются паратингентные уравнения |**16**, **17**, **18**, а также **12**|, которые по существу представляют некоторую разновидность обыкновенных дифференциальных неравенств. Решения паратингентных уравнений, называемые здесь интегралами, имеют много свойств интегралов систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ср. таже |**2**|), благодаря чему можно перенести на область паратингентных уравнений — в соответственно приспособленном виде — „ретракторный" метод Т. Важевского исследования хода интегралов |**14**| и его позднейшие видоизменения и разновидности [**1**, **13**]. Это становится возможным благодаря основным теоремам предлагаемого труда 1 и 2 (гл. V) о регуляризации поля $M(P)$, соот-

ветствующего данному паратингентному уравнению *). Теорема 2 имеет следующее содержание:

Полагаем, что поле $M(P)$ определено в открытом подмножестве Ω $(n+1)$ — мерного пространства, содержащем в себе открытое множество B; Φ обозначает ограничение B в отношении Ω; не существуют интегралы поля $M(P)$ правосторонно асимптотические относительно B и Ω, а всякая точка выхода по отношению к $M(P)$, B и Ω является сильной точкой выхода; S обозначает множество именно таких точек. Сверх того предполагаем **), что множество $T=\Phi-\tilde{S}$ борелевское F_σ.

При этих предположениях существует поле $M''(P)$ определённое в області и исполняющее условия:

1' $M''(P)=M(P)$ в $\Omega-B$,

2' $M''(P)$ есть поле линейных элементов аналитическое в B,

3' нет интегралов поля $M''(P)$ асимптотических вправо в отношении B и Ω,

4' все точки выхода в отношении $M''(P)$, B и Ω суть точки сильные и одновременно это точки выхода (сильные) в отношении поля $M(P)$ и тех самых множеств.

5' все точки входа в отношении $M''(P)$, B и Ω принадлежат к T.

Асимптотические интегралы определены так, как в [13 и 14]; точка $P_0(t_0, x^0)$, принадлежащая к Φ, называется точкой выхода ([14] стр. 292) если существует интеграл $x=\varphi(t)$, $a\leqslant t\leqslant t_0$ такой, что $\varphi(t_0)=x^0$ и $(t,\varphi(t))\in B$, когда $a\leqslant t<t_0$ — сильною точкою выхода, когда сверх того не существует интеграл. выходящий из точки P_0 направо $(t\geqslant t_0)$, заключающийся в замыкании $\bar{B}$.

Полученные с помощью теоремы 2 дальнейшие теоремы 3 и 4 (гл. 6) не являются, строго говоря, обобщением теорем Т. Важевского и А. Плися ([14] теор. 1 и [13]), так как они вводят добавочные предпосылки относительно топологической структуры выступающих там множеств, тем не менее они однако расширяют круг возможных применений ретрактного метода на очень обширную область паратингентных уравнений, обнимающих в качестве частного случая системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которых интегралы не обязаны исполнять условие единственности.

*) Ср. [2] стр. 51, 60.

**) Эту предпосылку, необходимую при применяемом здесь методе доказательства, можно заменить более сильным, но, быть-может, более интуитивным предположением, характеризующим ход интегралов поля $M(P)$ в соседстве краевых точек Φ (лемма 2, 3 или 4 гл. III).