ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. VII, 7. SECTIO A 1953

Z Zakładu Matematyki I Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr M. Biernacki

MIECZYSŁAW BIERNACKI

Sur un problème de M. Leja relatif à une fonction des distances entre des points

O zagadnieniu prof. Leji dotyczącym pewnej funkcji odległości pomiędzy punktami

О проблеме проф. Леи, относящейся к некоторой функции расстояний между точками

§ 1. M. F. Leja a montré que si $P_1, P_2, \dots, P_n, Q$ sont des points distincts entre eux et situés dans un même plan, on a l'inégalité:

$$(1)\qquad H(Q, P_1, \dots, P_n) = \frac{QP_2 \cdot QP_3 \dots QP_n}{P_1P_2 \cdot P_1P_3 \dots P_1P_n} + \frac{QP_1 \cdot QP_3 \dots QP_n}{P_2P_1 \cdot P_2P_3 \dots P_2P_n} + \dots + \frac{QP_1 \cdot QP_2 \dots QP_{n-1}}{P_nP_1 \cdot P_nP_2 \dots P_nP_{n-1}} \geq 1 .$$

Voici sa démonstration: introduisons dans le plan contenant les points $P_1, P_2, \dots, P_n, Q$ une variable complexe z et désignons par $z_1, z_2, \dots, z_n$ les affixes des points $P_1, P_2, \dots, P_n$ respectivement. Considérons la formule d'interpolation de Lagrange:

$$f(z) = f(z_1) \cdot \frac{(z-z_2)\dots(z-z_n)}{(z_1-z_2)\dots(z_1-z_n)} + f(z_2) \cdot \frac{(z-z_1)(z-z_3)\dots(z-z_n)}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)\dots(z_2-z_n)} + \dots + f(z_n) \cdot \frac{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_{n-1})}{(z_n-z_1)(z_n-z_2)\dots(z_n-z_{n-1})}.$$

En posant $f(z) \equiv 1$ et en supposant que z est l'affixe du point Q on obtient de suite l'inégalité (1). En supposant que le point Q s'approche indéfiniment d'un point P_i on voit que cette inégalité ne peut être améliorée.

M. Leja a posé la question de savoir si l'inégalité (1) subsiste dans le cas où $P_1, P_2, \ldots, P_n, Q$ sont des points quelconques de l'espace à un nombre quelconque de dimensions. Je vais montrer que la réponse a cette question est négative, même dans le cas de l'espace à trois dimensions. On a un exemple simple en supposant que $n=4$, que P_1, P_2, P_3, P_4 sont les sommets d'un tétraèdre régulier dont les arêtes ont des longueurs égales à 1 et que Q est le centre de gravité de ce tétraèdre. On a alors $QP_i = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\ (i=1,2,3,4)$ et, par suite,

$$H(Q, P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} < 1.$$

Considérons maintenant, n étant fixe, la borne inférieure de H lorsque les points $P_1, P_2, \ldots, P_n, Q$ prennent toutes les positions possibles. Je vais établir que cette borne tend vers zéro lorsque $n \to \infty$. Plus précisément je vais établir le proposition suivante:

I. *ε étant un nombre positif arbitrairement petit et n assez grand ($n > n(\varepsilon)$), il existe un système de points $P_1, P_2, \ldots, P_n, Q$ de l'espace à trois dimensions tel que l'on a*

$$H(Q, P_1, \ldots, P_n) < \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{e}} - \varepsilon\right)^n}.$$

La limite obtenue (moindre que $(1,2)^{-n}$ lorsque n est assez grand) ne saurait être sensiblement améliorée, ce qui résulte de la proposition suivante:

II. *$P_1, P_2, \ldots, P_n, Q$ étant des points de l'espace à trois dimensions, l'on a*

$$H(Q, P_1, P_2, \ldots, P_n) \geq \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Il résulte d'ailleurs de la démonstration (§ 3) que l'énoncé II s'applique aussi aux points de l'espace à plus de trois dimensions.

§ 2. Pour établir l'énoncé I je vais étudier l'exemple suivant. On considère la sphère de rayon 1. En introduisant sur cette sphère les coordonnées sphériques φ et Θ traçons, *m étant un nombre pair*, les m méridiens $\varphi=0$, $\varphi=2\pi/m$, $\varphi=2\cdot 2\pi/m, \ldots, \varphi=(m-1)\,2\pi/m$ et les $(m-1)$ parallèles $\Theta=$ const. dont les plans coupent le diamètre AB (joignant les

„pôles" A et B) de la sphère aux points équidistants, dont les coordonnées (comptées à partir du centre de la sphère) sont $0, \pm 2/m, \pm 4/m, \ldots, \pm(m-2)/m$. Nous supposerons que les points $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont les $n=m(m-1)$ points d'intersection, autres que les pôles A et B, de ces parallèles et de ces méridiens, tandis que le point Q est au centre de la sphère. k étant un des nombres $1, 2, \ldots, n$ nous allons chercher une limite supérieure du terme

$$\frac{QP_1\,QP_2\ldots QP_{k-1}\cdot QP_{k+1}\ldots QP_n}{P_kP_1\cdot P_kP_2\ldots P_kP_{k-1}\cdot P_kP_{k+1}\ldots P_kP_n}=\frac{1}{P_kP_1\cdot P_kP_2\ldots P_kP_n}$$

de l'expression H, c. à d. une limite inférieure de la somme

$$S=\log P_kP_1+\log P_kP_2+\ldots+\log P_kP_{k-1}+\log P_kP_{k+1}+\ldots+\log P_kP_n.$$

Nous allons comparer cette somme S avec l'expression $K:(4\pi/\mathrm{m}^2)$ où

$$K=\int\int\log(P_kM)\,d\sigma$$

et le point M parcourt la surface de la sphère, $d\sigma$ désignant l'élément de surface. $4\pi/\mathrm{m}^2$ représente l'aire de chacune des m^2 régions en lesquelles la surface de la sphère est partagée par le réseau des méridiens et des parallèles tracés. Nous allons commencer par comparer avec $\mathrm{m}^2K/4\pi$ une autre somme analogue S_1, puis nous évaluerons la différence entre S et S_1. Nous désignerons par $d(\Theta,\varphi)$ la distance entre le point de coordonnées sphériques (Θ,φ) et le point P_k. En vertu du théorème de la moyenne on a

$$\text{(2)}\qquad \frac{\mathrm{m}^2K}{4\pi}=\sum_{i=1}^{m^2}\log d(\overline{\Theta}_i,\overline{\varphi}_i)$$

où la somme est étendue à toutes les m^2 régions R_i, en lesquelles la surface de la sphère est partagée par les méridiens et les parallèles tracés, et où $\overline{\Theta}_i, \overline{\varphi}_i$ désignent les coordonnées d'un point de R_i. La somme S_1 s'obtient de la somme qui figure dans (2) en remplaçant chaque point $(\overline{\Theta}_i,\overline{\varphi}_i)$ par un des sommets du réseau des méridiens et des parallèles tracés, ce sommet étant situé sur la frontière de la région R_i. En admettant que les coordonnées sphériques du point P_k sont $\Theta=a\ (0\leq a\leq\pi/2)$ et $\varphi=0$, on choisit notamment la coordonnée Θ_i du sommet qui remplace le point $(\overline{\Theta}_i,\overline{\varphi})$ plus grande ou plus petite que $\overline{\Theta}_i$ selon que $\overline{\Theta}_i>a$ où $\overline{\Theta}_i<a$. On choisit la coordonnée φ_i plus grande que $\overline{\varphi}_i$ lorsque $0<\overline{\varphi}_i<\pi$ et plus petite que $\overline{\varphi}_i$ lorsque $\pi<\overline{\varphi}_i<2\pi$. Il est clair que la modification qui vient d'être exposée ne peut qu'augmenter les termes de la somme (2) qui correspondent aux quatre régions R_i dont les frontières contiennent le point P_k, du moins lorsque m est plus grand qu'une constante numérique. Pour évaluer l'effet de cette modification sur les autres termes de la somme (2) remarquons d'abord qu'en utilisant les formules qui expriment les coordonnées cartésiennes par les coordonnées sphériques on trouve que la distance entre les points (Θ_i, φ_i) et $(\overline{\Theta}_i, \overline{\varphi}_i)$ ne dépasse pas $|\sin\Theta_i \cos\varphi_i - \sin\overline{\Theta}_i \cos\overline{\varphi}_i| + |\sin\Theta_i \sin\varphi_i - \sin\overline{\Theta}_i \sin\overline{\varphi}_i| + |\cos\Theta_i - \cos\overline{\Theta}_i|$, donc, d'après le théorème de la moyenne, a fortiori ne dépasse pas $3|\Theta_i - \overline{\Theta}_i| + 2|\varphi_i - \overline{\varphi}|$. Or on a $|\varphi_i - \overline{\varphi}| < 2\pi/m$ et $|\Theta_i - \overline{\Theta}_i| < \pi/\sqrt{m}$, donc la distance entre les points (Θ_i, φ_i) et $(\overline{\Theta}_i, \overline{\varphi}_i)$ ne dépasse pas $A/\sqrt{m}$ où A est une constante numérique. Il est clair, d'autre part, que la distance de P_k à un point M de la sphère, qui est séparé de P_k par s parallèles, est égale à $2s/m$ au moins, et que la distance de P_k à un point M de la sphère qui est séparé de P_k par $s \leqslant m/2$ méridiens est égale à $4s/(m\sqrt{m})$ au moins (on trouve cette dernière limitation en projetant les points M et P_k sur un plan perpendiculaire à AB). En vertu du théorème des accroissements finis on peut écrire:

$$(*) \qquad |\log d(\Theta_i, \varphi_i) - \log d(\overline{\Theta}_i, \overline{\varphi})| \leqslant \frac{|d(\Theta_i, \varphi_i) - d(\overline{\Theta}_i, \overline{\varphi})|}{\operatorname{Min}|d(\Theta_i, \varphi_i), d(\overline{\Theta}_i, \overline{\varphi}_i)|} \leqslant \frac{(\Theta_i, \varphi_i) - (\overline{\Theta}_i, \overline{\varphi}_i)}{\operatorname{Min}|d(\Theta_i, \varphi_i), d(\overline{\Theta}_i, \overline{\varphi}_i)|}$$

où $(\Theta_i, \varphi_i) - (\overline{\Theta}_i, \overline{\varphi}_i)$ désigne la distance entre ces points. En considérant d'abord les régions limitées par des parallèles qui ne passent pas par P_k on voit, en tenant compte des inégalités obtenues auparavant, que la somme des expressions $(*)$ relatives à ces régions ne dépasse pas

$$Am\sqrt{m}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m}\right),$$

tandis que la somme des $(2m-4)$ expressions $(*)$ restantes ne dépasse pas

$$Am\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m}\right).$$

En résumé on a

$$(3) \qquad S_1 - \frac{m^2}{4\pi} K \geqslant -Bm\sqrt{m}\log m,$$

B étant une constante numérique.

Evaluons maintenant une borne inférieure de la différence $S-S_1$. La somme S diffère de S_1 en ce que 1) elle ne contient qu'une fois chacun des $(m-2)$ termes relatifs aux sommets du réseau qui correspondent à $\varphi=\pi\,(\Theta\neq 0,\ \Theta\neq a,\ \Theta\neq\pi)$, tandis que la somme S_1 contient ces termes deux fois; 2) au contraire, la somme S contient des termes relatifs aux sommets qui correspondent à $\varphi=0$ (le point P_k excepté); 3) elle contient aussi des termes relatifs aux sommets situés sur le parallèle $\varphi=a$ (le point P_k excepté); 4) elle ne contient pas les $2n$ termes relatifs aux „pôles" A et B de la sphère. Nous allons désigner par $\sum_1, \sum_2, \sum_3$ les sommes des termes $\log d(\Theta_i, \varphi_i)$ relatifs aux sommets dont il est question ci-dessus sous 1), 2) et 3) respectivement. On a évidemment $\sum_1 < m\log 2$,

$$\sum\nolimits_2 > 2\left[\log\frac{2}{m}+\log\left(2\cdot\frac{2}{m}\right)+\ldots+\log\left(\frac{m}{2}\cdot\frac{2}{m}\right)\right] > -m\log(m\,2).$$

Quant à la somme $\sum_3$, elle est supérieure à

$$m\log\left(2\sin a\cdot\sin\frac{\pi}{m}\right),$$

donc

$$\sum\nolimits_3 - m\log P_k A > m\left[\log\left(2\sin a\cdot\sin\frac{\pi}{m}\right)-\log\left(2\sin\frac{a}{2}\right)\right]=$$

$$= m\log\left(2\cos\frac{a}{2}\sin\frac{\pi}{m}\right).$$

Or

$$0 < a < \frac{\pi}{2},$$

donc

$$\cos\frac{a}{2} > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et

$$\sin\frac{\pi}{m} > \frac{2}{m}$$

par suite

$$\sum\nolimits_3 - m\log P_k A > -m\log m.$$

Enfin on a

$$m\log P_k B < m\log 2.$$

En résumé on a

$$S - S_1 > C\,m\log m, \tag{4}$$

C étant une constante numérique. En comparant les inégalités (3) et (4) on voit que

$$S > \frac{m^2}{4\pi} K - D m \sqrt{m} \log m,$$

où D est encore une constante numérique. On a donc

$$S > \frac{m^2}{4\pi} K (1 - \varepsilon)$$

où ε est arbitrairement petit, pourvu que m soit assez grand. Ce résultat étant valable quel que soit $k (k = 1, 2, \dots, n)$, on a pour H l'inégalité

$$H < n e^{-\frac{m^2}{4\pi} K (1-\varepsilon)}$$

Or $n = m^2 - m$, il vient donc

$$(**) \qquad H < e^{-\frac{n}{4\pi} K (1-\varepsilon')}$$

où ε' est arbitrairement petit si n assez grand. La valeur de l'intégrale

$$K = \int\int \log (P_k M) \, d\sigma$$

s'obtient aisément et l'on trouve $K = 2\pi (\log 4 - 1)$. En substituant cette valeur dans $(**)$ on obtient l'énoncé I dans le cas où $n = m^2 - m$, m étant pair. Pour établir cet énoncé généralement considérons un nombre pair m tel que $(m-2)^2 - (m-2) < n < m^2 - m$. Nous choisirons les points P_k et Q pour la valeur considérée de m de la manière indiquée plus haut, puis nous supprimerons arbitrairement $m^2 - m - n$ des points P_k. D'après ce qui précède, l'expression H est, avant la suppression de ces points P_k, moindre que

$$(2 e^{-\frac{1}{2}} - \varepsilon)^{-(m^2 - m)} < (2 e^{-\frac{1}{2}} - \varepsilon)^{-n}.$$

Or la suppression de ces points P_k ne peut augmenter chaque terme de H, donc aussi H, que de $2^{m^2 - m - n} \leq 2^{4m} < 16^{\sqrt{n} + 3}$ fois au plus, donc on aura

$$H < (2 e^{-\frac{1}{2}} - \varepsilon)^{-n} \cdot 16^{\sqrt{n} + 3} < (2 e^{-\frac{1}{2}} - \varepsilon')^{-n}$$

pourvu que $\varepsilon' > \varepsilon$ et n soit assez grand.

§ 3. La démonstration de l'énoncé II est fort simple. Pour $n = 2$ l'énoncé est évident, car il se réduit à l'inégalité $P_1 P_2 \leq Q P_1 + Q P_2$. Supposons donc qu'il soit exact pour n et faisons voir qu'il subsiste pour

$n+1$. On peut admettre que $QP_i \geqslant QP_{n+1}$ $(i=1,2,\ldots,n)$. $H(Q,P_1,\ldots,P_{n+1})$ s'obtient de $H(Q,P_1,\ldots P_n)$ en multipliant les termes successifs de cette dernière expression par

$$\frac{QP_{n+1}}{P_1P_{n+1}},\ \frac{QP_{n+1}}{P_2P_{n+1}},\ldots,\frac{QP_{n+1}}{P_nP_{n+1}}$$

respectivement et en ajoutant le terme

$$\frac{QP_1\cdot QP_2\ldots QP_n}{P_{n+1}P_1\cdot P_{n+1}P_2\ldots P_{n+1}P_n}.$$

Or on a, pour $i=1,\ldots,n$, $P_iP_{n+1}\leqslant QP_i+QP_{n+1}\leqslant 2QP_{n+1}$, donc $QP_{n+1}:P_iP_{n+1}\geqslant\frac{1}{2}$ et $H(Q,P_1,\ldots,P_{n+1})\geqslant\frac{1}{2}H(Q,P_1,\ldots,P_n)$, ce qui achève la démonstration.

Streszczenie

F. Leja wykazał, że jeśli $P_1,P_2,\ldots,P_n,Q$ są punktami płaszczyzny, to zachodzi nierówność

$$H(Q,P_1,\ldots,P_n)=\frac{QP_2\cdot QP_3\ldots QP_n}{P_1P_2\cdot P_1P_3\ldots P_1P_n}+\frac{QP_1\cdot QP_3\ldots QP_n}{P_2P_1\cdot P_2P_3\ldots P_2P_n}+\ldots+\frac{QP_1\cdot QP_2\ldots QP_{n-1}}{P_nP_1\cdot P_nP_2\ldots P_nP_{n-1}}\geqslant 1$$

oraz postawił pytanie, czy ta nierówność zachodzi i w przypadku, gdy $P_1,P_2,\ldots,P_n,Q$ są punktami przestrzeni m-wymiarowej?

W pracy niniejszej dowodzę, że odpowiedź na to pytanie jest przecząca. W szczególności dowodzę twierdzeń następujących:

I. Jeśli ε jest liczbą dodatnią dowolnie małą a n dość duże $(n>n(\varepsilon))$, to istnieje układ punktów $P_1,\ldots,P_n,Q$ przestrzeni trójwymiarowej, dla którego zachodzi nierówność

$$H(Q,P_1,\ldots,P_n)<\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{e}}-\varepsilon\right)^n}.$$

II. Dla każdego układu punktów $P_1,\ldots,P_n,Q$ przestrzeni trójwymiarowej zachodzi nierówność

$$H(Q,P_1,\ldots,P_n)\geqslant\frac{1}{2^{n-2}}.$$

Резюме

Ф. Лея показал, что, если $P_1, P_2, \ldots, P_n, Q$ суть точки плоскости, то имеет место неравенство

$$H(Q, P_1, \ldots, P_n) = \frac{QP_2 \cdot QP_3 \ldots QP_n}{P_1P_2 \cdot P_1P_3 \ldots P_1P_n} + \frac{QP_1 \cdot QP_3 \ldots QP_n}{P_2P_1 \cdot P_2P_3 \ldots P_2P_n} + \ldots +$$

$$+ \frac{QP_1 \cdot QP_2 \ldots QP_{n-1}}{P_nP_1 \cdot P_nP_2 \ldots P_nP_{n-1}} \geqslant 1$$

и поставил вопрос: сохраняется ли это неравенство и в случае, когда $P_1, P_2, \ldots, P_n, Q$ являются точками m-мерного пространства?

В этой работе я доказываю, что ответ на поставленный вопрос надо дать отрицательный. В частности, я доказываю следующие теоремы.

I. Если ε положительное число произвольно малое, а n достаточно большое ($n > n(\varepsilon)$), то существует система точек $P_1, \ldots, P_n, Q$, для которой имеет место неравенство

$$H(Q, P_1, \ldots, P_n) < \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{e}} - \varepsilon\right)^n}.$$

II. Для всякой системы точек $P_1, \ldots, P_n, Q$ трёхмерного пространства имеет место неравенство

$$H(Q, P_1, \ldots, P_n) \geqslant \frac{1}{2^{n-2}}.$$