ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. VI, 4 SECTIO A 1952

Z Seminarium Matematycznego III, Wydz. Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: z. prof. dr Krzysztof Tatarkiewicz

KRZYSZTOF TATARKIEWICZ

Sur les limites des coefficients des suites des polynômes généralisés

O pewnych granicach ciągów współczynników uogólnionych wielomianów

О некоторых пределах последовательностей коэффициентов обобщенных полиномов

Il y a quelques années F. Orin a démontré un théorème sur les limites des coefficients des suites des polynômes généralisés [1]). Ces résultats sont bien intéressants, mais ne s'appliquent qu'à des polynômes généralisés construits à l'aide des suites minimalement fermées de l'espace envisagé, ce qui en restreint l'application, étant donné que de nombreux systèmes [2]) ne sont pas minimalment fermés (par exemple dans l'espace L^2 il n'existe pas de système minimalement fermé de monômes τ^n) [3]).

Le travail présent est consacré à l'étude d'une généralisation de ces résultats, généralisation qui permet de les appliquer à d'autres systèmes (voir Théorème 3,1). J'obtiens ce résultat à l'aide des notions introduites au § 1 de mon travail *Une théorie généralisée de la meilleure approximation* (ce volume p. 31).

Le § 5 est consacré à l'étude de l'équivalence des notions introduites au § 1 et de la notion de suite minimalement fermée.

§ 1. Soit C_δ un espace vectoriel, complet, normé par la norme $\delta(x)$, et soit $Z = \{z_1, z_2, ...\}$ un système de l'espace C_δ.

Nous appelons polynômes (ou polynômes généralisés) de l'espace C_δ et du système Z de degré n toute expression

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot z_i$$

où β_i sont des nombres réels.

---

[1]) F r i n k O r i n j r. *Series expansions in linear vector space.* Amer. Journ. of Math. 63, p. 87-100. Baltimore 1941,

[2]) Voir mon travail *Une théorie généralisée de la meilleure approximation* § 1, ce volume, page 31.

[3]) Voir par exemple. S. K a c z m a r z, H. S t e i n h a u s *Theorie der Orthogonalreihen.* Lwów 1935.

Df. 1,1. *Soit* $z_k \in Z$. *Nous allons désigner par* $\varepsilon_n(k)$ *l'ordre de la meilleure approximation de* z_k *selon le système* $Z^k = Z - \{z_k\}$, *c'est-à-dire que*

$$\varepsilon_n(k) = \mu_n(z_k, Z - \{z_k\}, \delta)\ ^{1)}$$

Exemple 1,2. La suite $Z = \{\hat{1}, \hat{\tau}, \hat{\tau}^2, \dots\}$, forme un système fermé de l'espace L^2. En applicant le théorème de Gram-Müntz nous pouvons calculer que pour $k < n$

$$\mu_n(\hat{\tau}^k, Z - \{\hat{\tau}^k\}, \delta) = \frac{(k!)^2 \cdot \sqrt{2k+1}}{(n-k+1)\dots(n+k+1)}$$

donc nous avons l'égalité assymptotique (k est fixe)

$$\varepsilon_n(k) \sim \lambda_k n^{-2k} \quad \text{où } \lambda_k = \sqrt{2k} \cdot (k!)^2$$

qui est fort simple.

Df. 1,3. *S'il existe un* $\varepsilon_k > 0$ *tel que*

$$\varepsilon_n(k) \geqslant \varepsilon_k \quad \text{pour } n = 1, 2, 3 \dots$$

alors nous dirons que z_k *est un élément minimal de* Z *pour la norme* $\delta(x)$.

Remarque: Dans la suite nous nous bornons à des systèmes car pour les suites qui ne sont pas des systèmes il existe des z_k qui sont linéairment dépendants des éléments $z_1, \dots, z_{k-1}$. Pour ces z_k nous aurons $\varepsilon_n(k) = 0$ pour $n \geqslant k$, d'où il suit qu'une suite formée uniquement d'éléments minimaux est nécéssairement un système.

§ 2. Th. 2,1. *Soient deux polynômes de degré* $\leqslant n$

$$x = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot z_k \qquad y = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \cdot z_k$$

(nous ne supposons pas que le degré soit égal à n*, donc il peut arriver que* $a_n = 0$ *etc). Alors*

$$|a_k - \beta_k| \leqslant \frac{\delta(x-y)}{\varepsilon_n(k)} \tag{2,2}$$

Dém. Pour les k pour lesquels $a_k = \beta_k$ le théorème est évident. Considérons les k pour lesquels $a_k - \beta_k \neq 0$. Pour fixer les idées posons $k = 1$. Alors

$$|a_1 - \beta_1| \cdot \varepsilon_n(1) \leqslant |a_1 - \beta_1| \cdot \delta\left[z_1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{a_i - \beta_i}{\beta_1 - a_1} \cdot z_i\right] = \delta(x-y)$$

C. Q. F. D.

[1]) Voir ce volume p. 32.

Si $y = \Theta$, alors $\beta_k = 0$ et $\delta(y) = 0$. Nous avons donc la formule

$$|a_k| \leqslant \frac{\delta(x)}{\varepsilon_n(k)}$$

Dans le cas général la formule (2,2) ne peut être remplacée par une autre, dont le second membre contiendrait en plus un coefficient plus petit que 1. Car si $y = \Theta$ et x est le n-ième polynôme de meilleure approximation de z_k selon Z^k alors l'inégalité faible dans la formule (2,2) se reduit à l'égalité.

Si l'élément z_k est minimal, alors, par définition, il existe un nombre $\varepsilon_k > 0$, tel que $\varepsilon_n(k) \geqslant \varepsilon_k$. Supposons que $\delta(x) \leqslant \sigma$ (ou que $x \in K(\Theta, \sigma)$). Nous avons alors

$$|a_k| \leqslant \frac{\sigma}{\varepsilon_k}$$

Nous avons donc démontré le théorème suivant:

Th. 2,3. *Si z_k est un élément minimal du système Z, pour la norme $\delta(x)$, alors pour tous les polynômes de degré quelconque*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot z_i$$

appartenant à $K(\Theta, \sigma)$, l'ensemble des k-ièmes coefficients a_k est borné.

Un cas particulier de ce théorème où Z est le système des monômes $\{\hat{1}, \hat{\tau}, \hat{\tau}^2, \ldots\}$ et la norme est définie par

$$\delta(x) = \max_{|\tau| \leqslant 1} |x(\tau)|$$

est connu depuis longtemps et il a une certaine importance dans la théorie classique des polynômes de Tchebycheff dans le domaine complexe[5].

Th. 2,4. *Soit*

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^n \cdot z_i \qquad y_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^n \cdot z_i$$

Supposons qu'il existe un $f \in C_\delta$ et un k tel que

$$\delta(x_n - f) = o\,[\varepsilon_n(k)] = \delta(y_n - f)\ ^{6)}$$

[5]) Il est aisé de voir que dans ce cas, chacun des éléments de Z est minimal.

[6]) On pourrait appeler la suite

$$\delta(x_n - f)$$

(qui joue un rôle important au § 3) *l'ordre de convergence de x_n selon δ.*

Alors pour ce k

$$\lim_{n\to\infty} |\alpha_k^n - \beta_k^n| = 0$$

La démonstration résulte instantanément du Théorème 2,1 — nous aurons

$$|\alpha_k^n - \beta_k^n| \leqslant \frac{\delta(x_n - y_n)}{\varepsilon_n(k)} \leqslant \frac{\delta(x_n - f) + \delta(y_n - f)}{\varepsilon_n(k)} = \frac{o[\varepsilon_n(k)]}{\varepsilon_n(k)} \to 0$$

§ 3. **Th. 3,1.** *Soit Z un système de l'espace C_δ. Soient $f \in C_\delta$ et une suite de polynômes généralisés*

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^n \cdot z_i$$

tels que pour un k determiné

$$\delta(x_n - f) = o[\varepsilon_n(k)] \tag{3,2}$$

Alors il existe la limite finie

$$a_k(f) \underset{df}{=} \lim_{n\to\infty} \alpha_k^n \tag{3,3}$$

qui ne dépend pas du choix de la suite $\{x_n\}$, (parmi celles qui vérifient la condition (3,2)).

Dém. I. Soit (3,2). Cela signifie que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\delta(x_n - f)}{\varepsilon_n(k)} = 0$$

Donc pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un N_ε tel que si $n > N_\varepsilon$ et $m \geqslant 0$ alors

$$0 \leqslant \frac{\delta(x_{n+m} - f)}{\varepsilon_{n+m}(k)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Or le polynôme x_n est de degré $\leqslant n+m$, et on peut appliquer le Théorème 2,1. Nous aurons

$$|\alpha_k^n - \alpha_k^{n+m}| \leqslant \frac{\delta(x_n - x_{n+m})}{\varepsilon_{n+m}(k)} \leqslant \frac{\delta(x_n - f) + \delta(x_{n+m} - f)}{\varepsilon_{n+m}(k)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta(x_n - f)}{\varepsilon_n(k)} + \frac{\delta(x_{n+m} - f)}{\varepsilon_{n+m}(k)} \leqslant \varepsilon$$

(L'avant-dernière inégalité est une suite du fait que $\varepsilon_n(k) \geqslant \varepsilon_{n+m}(k)$). Vu le Théorème de Cauchy, l'existance de la limite (3,3) est assurée.

II. Soit

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^n \cdot z_i \quad \text{et} \quad \delta(y_n - f) = o[\varepsilon_n(k)].$$

Supposons que la suite x_n vérifie la condition (3,2). Alors en vertu du Théorème 2,4 l'on a

$$\lim_{n\to\infty} \left| a_k^n - \beta_k^n \right| = 0$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} a_k^n = \lim_{n\to\infty} \beta_k^n$$

et la valeur de la limite (3,3) ne dépend pas du choix de la suite $\{x_n\}$ ou de la suite $\{y_n\}$.

C. Q. F. D.

L'hypothèse suivant laquelle il existe un $f \in C_\delta$ qui vérifie (3,2) est assez artificielle. On peut la remplacer par une autre plus naturelle, mais plus compliquée:

Pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un N_ε tel que si $n > N_\varepsilon$ et $m > 0$ alors

$$\frac{\delta(x_n - x_{n+m})}{\varepsilon_n(k)} < \varepsilon$$

L'espace C_δ étant par définition complet, ces deux hypothèses sont équivalentes.

Les résultats bien connus sur l'ordre de la meilleure approximation permettent de conclure qu'il existe des normes δ, des systèmes Z et des $f \in C_\delta$ pour lesquels la condition (3,2) n'est vérifiée pour aucune suite de polynômes généralisés (comparer l'exemple 1,2).

Si l'élément z_k est minimal, alors (3,2) signifie tout simplement que $\delta(x_n - f) \to 0$ et cette condition sera vérifiée par chaque suite convergente $x_n \to f$. Nous avons donc aboutit au théorème:

Th. 3,4. *Si z_k est un élément minimal de Z pour la norme $\delta(x)$ et*

(3,5) $$x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i^n \cdot z_i \longrightarrow f$$

alors il existe une limite finie

$$a_k(f) \underset{df}{=} \lim_{n\to\infty} a_k^n$$

La valeur de cette limite ne dépend pas du choix de la suite $\{x_n\}$ (parmi celles qui vérifient (3,5)).

Ce théorème comprend comme cas particulier la théorème d'Orin (voir le Théorème 5,3 et la Définition 5,1).

§ 4. Posons

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \delta_{kq} \cdot z_k$$

— où δ_{kq} sont les symboles de Kronecker. Nous avons

$$x_n = \begin{cases} \Theta \text{ pour } n < q \\ z_q \text{ pour } n \geqslant q \end{cases}$$

Or $\delta(x_n - z_q) = 0$ pour $n \geqslant q$ donc la condition (3,2) sera toujours vérifiée. Les δ_{kq} ne dépendent pas de n et

$$\lim_{n \to \infty} \delta_{kq} = \delta_{kq}$$

Donc

$$a_k(z_q) = \delta_{kq}$$

et nous avons le théorème

Th. 4,1. *La suite* $\{a_1, a_2, \dots ; z_1, z_2, \dots\}$ *est biorthogonale.*

§ 5. Introduisons la définition suivante:

Df. 5,1. *Un système formé uniquement d'éléments minimaux est dit système minimal.*

Il'y a longtemps què l'on a introduit la notion de la suite minimalement fermée [7]).

Df 5,2. *Une suite (un système) fermée est minimalement fermée si en rejetant un élément quelconque on obtient une suite qui n'est plus fermée.*

Il est intéressant d'étudier les relaticns entre les notions: de suite minimalement fermée et de système minimal. Je demontrerai qu'elles sont équivalentes moyennant certaines hypothèses. Cette équivalence nous montrera que les noticns introduites dans ce travail (Définition 1,3 et Définition 5,1) généralisent effectivement la notion de la suite minimalement fermée

Th. 5,3. *Si Z est un système fermée, alors les deux propositions suiantes scnt équivalentes:*

(5,4). *Z est un système minimalement fermé.*

(5.5). *Z est un système minimal.*

Dém. I. Suppcsons que Z est un système minimal. Soient w_k^n des polynômes du systéme $Z^k = Z - \{z_k\}$ donc de la forme

$$w_k^n = \beta_1^n \cdot z_1 + \dots + \beta_{k-1}^n \cdot z_{k-1} + \beta_{k+1}^n \cdot z_{k+1} + \dots + \beta_n^n \cdot z_n \tag{5,6}$$

De la définition de $\varepsilon_n(k)$ nous aurons

$$\delta(w_k^n - z_k) \geqslant \varepsilon_n(k)$$

[7]) Voir par exemple la monographie citée de Kaczmarz et Steinhaus.

Si (5,5) est vérifié, alors en vertu des Définitions 1,3 et 5,1 il existe une suite de constantes $\varepsilon_k > 0$, telles que $\varepsilon_n(k) \geqslant \varepsilon_k$ indépendamment de n. Alors nous aurons

$$\delta(w_k^n - z_k) \geqslant \varepsilon_k > 0$$

Nous voyons qu'aucune suite w_k^n de polynômes du système Z^k ne peut vérifier la condition

$$\lim_{n\to\infty} \delta(w_k^n - z_k) = 0$$

ni la condition équivalente

(5,7) $$\lim_{n\to\infty} w_k^n = z_k$$

Donc aucun système Z^k n'est fermé dans C_δ et la condition (5,4) est vérifiée.

II. Supposons que la condition (5,4) soit vérifiée.

Alors

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \mu_n(z_k, Z^k, \delta) > 0$$

— car si ce n'etait pas une inégalité, mais une égalité il existerait alors une suite de polynômes w_k^n de la forme (5,6) et vérifiant la condition (5,7) et Z ne serait pas un système minimalement fermé.

Donc $\varepsilon_n(k) = \mu_n(z_k, Z^k, \delta) \geqslant \varepsilon_k > 0$ et chaque élément $z_k \in Z$ est minimal. La condition (5,5) est verifiée.

C. Q. F. D.

Streszczenie

Oznaczmy przez C_δ przestrzeń wektorową, zupełną i unormowaną przez $\delta(x)$. Niech $Z = \{z_1, z_2, \ldots\} \subset C_\delta$. Oznaczmy

$$\varepsilon_n(k) \underset{df}{=} \mu_n(z_k, Z - z_k, \delta)$$

(por. moją pracę *Uogólniona teoria najlepszej aproksymacji*).

Oznaczenia te wykorzystuję w głównym wyniku tej pracy, którym jest następujące twierdzenie:

Tw. 3,1. *Przypuśćmy, że Z jest systemem przestrzeni C_δ, $f \in C_\delta$ i $\{x_n\}$ jest ciągiem uogólnionych wielomianów*

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i^n \cdot z_i$$

Jeśli dla pewnego k jest spełniony warunek

(3,2) $$\delta(x_n - f) = o\,[\varepsilon_n(k)]$$

to wtedy istnieje granica skończona

$$a_k(f) \underset{df}{=} \lim_{n\to\infty} \alpha_k^n$$

Wartość tej granicy jest taka sama dla wszystkich ciągów $\{x_n\}$ *spełniających warunek* (3,2).

W § 5 wykazuję, że jeśli Z jest ciągiem zamkniętym w C_δ i jeśli istnieje ciąg $\{\varepsilon_n\}$ liczb takich że

$$\varepsilon_n(k) \geqslant \varepsilon_k > 0$$

dla wszystkich n i k, to wtedy ciąg $Z = \{z_1, z_2 \ldots\}$ jest minimalnie zamknięty i naodwrót.

Резюмэ

Обозначим через C_δ пространство Банаха нормированное функционалом $\delta(x)$. Пусть $Z = \{z_1, z_2, \ldots\} \subset C_\delta$. Обозначим

$$\varepsilon_n(k) \underset{df}{=} \mu_n(z_k, Z - z_k, \delta)$$

(ср. мою работу «Обобщенная теория наилучшей арпроксимации»).

Эти обозначения использую в главном результате этой работы, которым является следующая теорема:

Т. 3,1. Предположим, что $Z = \{z_1, z_2 \ldots\}$ является системой пространств C_δ, $f \epsilon C_\delta$ и $\{x_n\}$ проследовательность сбобщенных полиномов

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i^n \cdot z_i$$

Если для некоторого k удовлетворено условие

(3,2) $$\delta(x_n - f) = o\,[\varepsilon_n(k)]$$

тогда существует предел

$$a_k(f) \underset{df}{=} \lim_{n\to\infty} \alpha_k^n$$

Числовое значение предела является таковоже для всех последовательностей $\{x_n\}$ удовлетворяющих условию (3,2).

В § 5 доказываю что, если Z является замкнутой последовательностью в C_δ и если существует последовательность $\{\varepsilon_n\}$ таких чисел, что

$$\varepsilon_n(k) \geqslant \varepsilon_k > 0$$

для всех n и k, тогда последовательность $Z = \{z_1, z_2, \ldots\}$ является минимально замкнутой и наоборот.