ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. VI, 2 SECTIO A 1952

Z Seminarium Matematycznego III. Wydz. Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: z. prof. dr Krzysztof Tatarkiewicz

KRZYSZTOF TATARKIEWICZ

Quelques remarques sur la convexité des sphères

Kilka uwag o wypukłości kul

Несколько замечаний о выпуклости сфер

Le travail présent a pour but l'étude des sphères dans les espaces de Banach. On trouvera les considérations préliminaires dans le § 1. Le § 2 est consacré à l'étude de la structure de la surface des sphères. Au début du § 1 et du § 2 je rappelle un certain nombre de résultats connus, qui seront employés dans la suite. Le résultat le plus important, c'est le Théorème 2,9, qui montre que la «forme» de la sphère ne dépend ni du rayon ni de son centre (mais seulement de la norme de l'espace envisagé) et les Théorèmes 2,12 et 2,14. Le § 3 contient une méthode qui permet de visualiser la structure de la sphère. Cette méthode est intéressante non seulement par elle-même, mais aussi à cause de ses applications.

§ 1. Soit C_δ un espace vectoriel, complet et normé par $\delta(x)$ — c'est-à-dire un espace (B) de Banach.

Pour éviter les malentendus possibles j'emploirai toujours des minuscules grecques pour les éléments de l'ensemble des nombres réels R_1 des minuscules latines pour les éléments de C_δ (sauf pour l'élément neutre Θ car je n'ai pas voulu m'écarter de la convention généralement acceptée), et des majuscules latines pour les ensembles.

Df. 1,1. *Nous appelons sphère $K(a,\sigma)$ de centre a et de rayon $\sigma \geqslant 0$ l'ensemble*

$$K(a,\sigma) = \underset{x \in C_\delta}{E}\,[\delta(x-a) \leqslant \sigma]$$

La sphère est un ensemble fermé.

Df. 1,2. *Nous appelons segment $\langle a_1, a_2 \rangle$, où $a_1 \neq a_2$ l'ensemble de de tous les éléments $x \in C_\delta$, qui ont la forme*

$$x = a_1 + \tau(a_2 - a_1) \qquad \tau \in \langle 0,1 \rangle$$

Si $\tau \in (-\infty, +\infty)$ nous aurons la droite $[a_1, a_2]$ passant par a_1 et par a_2.

Vu la supposition $a_1 \neq a_2$ le segment est toujours formé de plus d'un point.

Maintenant je vais démontrer un théorème qui nous sera très utile dans la suite.

Th. 1,3. *Si les éléments $x_1, \ldots, x_n$ sont additifs selon la norme:*

$$\delta\left[\sum_{k=1}^{n} x_k\right] = \sum_{k=1}^{n} \delta(x_k)$$

alors toutes leurs combinaisons linéaires sont aussi additives selon la norme:

$$\delta\left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right] = \sum_{k=1}^{n} \delta(\alpha_k x_k) = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \cdot \delta(x_k)$$

pourvu que les coefficients α_k aient tous le même signe.

Dém. Pour fixer les idées supposons que $\operatorname{sgn} \alpha_k = +1$. De la loi du triangle itérée $n-1$ fois il résulte

$$\delta\left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right] \leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \delta(x_k) \tag{1,4}$$

Il suffit donc de démontrer que pour aucune suite $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nous n'avons l'inégalité forte $<$ dans (1,4). Pour réduire à l'absurde supposons que pour n nombres positifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nous ayons

$$\delta\left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right] < \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \delta(x_k)$$

Prenons le plus grand des nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Pour fixer les idées admettons que ce soit α_1, c'est-à-dire que $\alpha_1 = \max[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$. Alors

$$\delta\left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right] + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_1 - \alpha_k) \cdot \delta(x_k) < \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \delta(x_k) + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_1 - \alpha_k) \cdot \delta(x_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [\alpha_1 \cdot \delta(x_k)] = \alpha_1 \sum_{k=1}^{n} \delta(x_k) = \alpha_1 \cdot \delta\left[\sum_{k=1}^{n} x_k\right] = \delta\left[\sum_{k=1}^{n} (\alpha_1 x_k)\right] =$$

$$= \delta\left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_1 - \alpha_k) x_k\right] \leqslant \delta\left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right] + \delta\left[\sum_{k=1}^{n} (\alpha_1 - \alpha_k) x_k\right] \leqslant$$

$$\leqslant \delta\left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right] + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_1 - \alpha_k) \cdot \delta(x_k).$$

La première inégalité (forte) résulte de notre supposition; la troisième égalité de l'additivité de $x_1, \ldots, x_n$; les autres égalités sont des équivalences algébriques et les deux dernières inégalités résultent de la loi du triangle.

Nous sommes donc arrivés à l'absurde. On peut traiter pareillement le cas de $\operatorname{sgn} a_k = -1$. Ainsi notre théorème est démontré.

Il est facile de remarquer que ce théorème reste vrai si certains coefficients a_k sont égaux à zèro.

§ 2. Df. 2,1. *Nous appelons translation l'opération* $\bar{x} = x + b$. *Nous appelons contraction l'opération* $x^* = a x$ *et* $a > 0$ *sera dit coefficient de cette contraction.*

Df. 2,2. *Nous appelons direction la classe d'abstraction des directions* $a(x - y)$ *où* $x, y \in C_\delta$ *et* $a \in R_1$.

Th. 2,3. *Les translations et les contractions transforment biunivoquement les sphères en sphères, les segments en segments, ne changeant pas leurs directions. Les translations ne changent pas les rayons des sphères, les contractions les multiplient par leurs coefficients.*

Dém, I. Nous avons

$$\bar{x}(\tau) = x(\tau) + b = a_1 + \tau(a_2 - a_1) + b = (a_1 + b) + \tau[(a_2 + b) - (a_1 + b)] =$$
$$= \bar{a}_1 + \tau(\bar{a}_2 - \bar{a}_1)$$

et

$$\bar{a}_2 - \bar{a}_1 = (a_2 + b) - (a_1 + b) = a_2 - a_1$$

donc la translation $\bar{x} = x + b$ transforme le segment $\langle a_1, a_2 \rangle$ en segment $\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2 \rangle$ de même direction.

II. La translation transforme biunivoquement la sphère $K(s, \sigma)$ en sphère $K(\bar{s}, \sigma)$. En effet si $x \in K(s, \sigma)$ alors $\delta(x - s) \leqslant \sigma$, mais

$$\delta(\bar{x} - \bar{s}) = \delta(x + b - s - b) = \delta(x - s) \leqslant \sigma$$

donc

$$\bar{x} \in K(s + b, \sigma) = K(\bar{s}, \sigma)$$

et inversement.

III. La contraction $x^* = a x$ transforme la sphère $K(s, \sigma)$ en $K(s^*, a\sigma)$. En effet, si $x \in K(s, \sigma)$ alors $\delta(s - x) \leqslant \sigma$.

Mais alors

$$\delta(s^* - x^*) = \delta(a s - a x) = a \cdot \delta(s - x) \leqslant \sigma a$$

donc

$$x^* \in K(a s, a \sigma)$$

Ce calcul peut être effectué dans le sens inverse. Nous avons donc

$$[K(s, \sigma)]^* = K(s^*, a\sigma).$$

IV. Nous montrerons encore que les contractions transforment les segments en segments, ne changeant pas leurs directions. En effet si $x^* = a x$ et $x(\tau) = a_1 + \tau(a_1 - a_2)$, alors

$$[x(\tau)]^* = a x(\tau) = a a_1 + a \tau(a_1 - a_2) = a a_1 + \tau(a a_1 - a a_2) =$$
$$= a_1^* + \tau(a_1^* - a_2^*)$$

donc

$$[\langle a_1, a_2 \rangle]^* = \langle a_1^*, a_2^* \rangle.$$

et

$$a_1^* - a_2^* = \alpha (a_1 - a_2)$$

— la direction ne change pas.

V. Il s'ensuit immédiatement des axiomes que verifient les espaces (B), que la translation et la contraction sont des transformations biuniviques.

C. Q. F. D.

Remarquons encore le théorème

Th. 2,4. *Supposons que nous ayons deux sphères quelconques. On peut transformer l'une dans l'autre à l'aide du produit d'une translation et d'une contraction convenablement choisies.*

Th. 2,5. *La sphère est un ensemble convexe* [1]).

Dém. Vu le Théorème 2,4, nous pouvons transformer chaque sphère $K(s, \sigma)$ dans la sphère $K(\Theta, 1)$, à l'aide du produit d'une translation et d'une contraction. Or du Théorème 2,3 il résulte que les segments se transforment par ce produit en segments. Donc la convexité, qui est définie exclusivement à l'aide de la notion du segment, sera un invariant de cette transformation. Ainsi il suffit de démontrer que la sphère $K(\Theta, 1)$ est convexe.

Supposons que $a_1, a_2 \in K(\Theta, 1)$, donc que $\delta(a_i) \leqslant 1$. Je montrerai qu'alors $\langle a_1, a_2 \rangle \in K(\Theta, 1)$. En effet si

$$x(\tau) = a_1 + \tau(a_2 - a_1) = (1-\tau) a_1 + \tau a_2$$

où

$$\tau \in \langle 0,1 \rangle,$$

alors

$$\delta\,[x(\tau)] = \delta\,[(1-\tau) a_1 + \tau a_2] \leqslant \delta\,[(1-\tau) a_1] + \delta(\tau a_2) =$$
$$= (1-\tau) \cdot \delta(a_1) + \tau \cdot \delta(a_2) \leqslant 1 - \tau + \tau = 1$$

donc $\delta\,[x(\tau)] \leqslant 1$, ce qui signifie que $x(\tau) \in K(\Theta, 1)$

C. Q. F. D.

Nous donnerons ensuite (§ 3) des exemples d'espaces C_δ ayant des sphères fortement convexes et d'espaces C_δ ayant des sphères faiblement convexes [2]).

Après avoir rappelé un certain nombre de résultats élémentaires, nous pouvons aborder l'étude plus approfondie de la structure de la surface

---

[1]) Nous rappelons qu'on appelle A convexe si $x, y \in A$ entraîne $\langle x, y \rangle \subset A$.

[2]) Un ensemble convexe A est fortement convexe, si après avoir été depourvu de n'importe quel élément appartenant à $F'A$ il reste convexe (par $F'A$ nous désignons la frontière de A et par $I'A$ l'intérieur de A). Un ensemble convexe est faiblement convexe s'il n'est pas fortement convexe.

de la sphère. Nous allons étudier quels morceaux des variétés linéaires peuvent être contenus dans les surfaces des sphères (c'est-à-dire dans les ensembles d'éléments x tels que $\delta(x-a)=\sigma$). Dans ce but introduisons la définition suivante

Df. 2,6. *Soit L le produit d'une variété linéaire H et de la sphère $K(a,\sigma)$, c'est-à-dire $L=H\cdot K(a,\sigma)$ et soit $L\subset F'K(a,\sigma)$. Supposons que L soit saturé, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'ensemble $\text{Ł}\neq L$ qui soit le produit d'une variété linéaire H_1 et de notre sphère $K(a,\sigma)$ et tel que $L\subset \text{Ł}\subset F'K(a,\sigma)$. Alors nous appellerons l'ensemble de planéité de la sphère $K(a,\sigma)$.*

Remarquons qu'un sous-ensemble de l'ensemble de planéité peut ne pas le définir univoquement, bien que pour chaque ensemble, qui est le produit d'une variété linéaire et de notre sphère et qui contient plus d'un élément il existe un ensemble de planéité, qui le contienne.

Comme produit de deux ensembles convexes, l'ensemble de planéité est convexe. Inversement, on peut démontrer le théorème suivant.

Th. 2,7. *Si l'ensemble convexe $L\subset F'K(a,\sigma)$ est saturé par rapport à cette propriété, c'est-à-dire s'il n'existe pas un ensemble convexe $\text{Ł}\neq L$ et tel que $L\subset \text{Ł}\subset F'K(a,\sigma)$, alors L est un ensemble de planéité de la sphère $K(a,\sigma)$* [3].

Nous allons démontrer maintenant un théorème important

Th. 2,8. *Soient deux sphères $K_i=K(a_i,\sigma_i)$, $i=1,2$; soit L_1 un ensemble de planéité de K_1 et soit $\mathfrak{P}$ la classe $a(x-a_1)$ où $x\in L_1, a>0$.*

Alors l'ensemble des x appartenant à $F'K_2$ et dont les directions $a(x-a_2), a>0$ appartienant à $\mathfrak{P}$, forment un ensemble de planéité de K_2, et inversement.

Dém. Il résulte du Théorème 2,4 l'existence d'une transformation Φ qui est le produit d'une contraction et d'une translation et telle que $\Phi(K_1)=K_2$. Vu le Théorème 2,3 Φ ne changera pas les directions et transformera les variétés linéaires en variétés linéaires. Donc $L_2=\Phi(L_1)$ sera le produit d'une variété linéaire et de la sphère K_2. Nous disons qu'il est saturé — donc qu'il est un ensemble de planéité. En effet s'il n'était pas saturè nous prendrions la transformation inverse de Φ, (qui est biunivoque). Alors l'image de l'ensemble de planéité qui est un surensemble de $\Phi(L_1)$ ne serait pas égale à L_1, donc L_1 ne serait pas saturé, contrairement à nos hypothèses.

---

[3]) Comparer par exemple R. F. Arens, J. L. Kelly, *Characterizations of the space of continous functions over a compact Hausdorff space*, Trans. Amer. Math. Soc. 62. p. 505 (1947).

Soit $x_1 \epsilon L_1$ donc $a(x_1 - a_1) \epsilon \mathfrak{P}$. Alors

$$x_2 = \Phi(x_1) \epsilon L_2, \qquad a_2 = \Phi(a_1).$$

Etant donné que Φ ne change pas les directions, nous aurons:

$$a(x_2 - a_2) = \beta(\Phi(x_1) - \Phi(a_1)) \epsilon \mathfrak{P}.$$

Ou peut énoncer ce théorème d'une autre manière:

Th. 2,9. *L'ensemble des stéréo-angles, qu'on obtient en joignant le centre de la sphère à ses ensembles de planéité, ne depend ni de son centre ni de son rayon, mais seulement de l'espace C_δ.*

Introduisons la définition suivante:

Df. 2,10. *Soit L un ensemble de planéité de la sphère $K(a, \sigma)$. Nous appelons cône d'additivité défini par L l'ensemble des éléments $a(x - a)$ où $x \epsilon L$ et $a \geqslant 0$.*

Les ensembles de planéité étant fermés, les cônes d'additivité sont aussi fermés.

Vu le Théorème 2,9 chaque cône d'additivité de la spère $K(a, \sigma)$ peut être transformé par la translation $\bar{x} = x - a$ en un cône d'additivite de la sphère $K(\Theta, \sigma)$.

Th. 2,11. *Si P est un cône d'additivité de la sphère $K(\Theta, 1)$ et $\Theta \neq x \epsilon P$ alors $a x \bar{\epsilon} P$ pour $a < 0$.*

Dém. Supposons que $a x \epsilon P$ où $a < 0$ et supposons que L soit un ensemble de planéité de la sphère $K(\Theta, 1)$ qui définit P. Alors

$$a_1 = \frac{x}{\delta(x)} \epsilon L \qquad a_2 = \frac{a x}{\delta(ax)} = - \frac{x}{\delta(x)} \epsilon L.$$

Mais L est un ensemble convexe, donc

$$\Theta \epsilon \langle a_1, -a_1 \rangle = \langle a_1, a_2 \rangle \subset L \subset F' K(\Theta, 1)$$

ce qui est impossible.

C. Q. F. D.

Il est aisé de voir que si L est un ensemble de planéité de $K(\Theta, 1)$ alors l'ensemble des éléments $-x$ ou $x \epsilon L$ forme aussi un ensemble de planéité. Donc si L est un ensemble de planéité de $K(\Theta, 1)$ alors l'ensemble des éléments $a x$ où $x \epsilon L, a \leqslant 0$ forme aussi un cône d'additivité, ayant seulement le point Θ (le centre de la sphére) commun avec le cône d'additivité defini par L.

Th. 2,12. *Soit P un cône d'additivité de la sphère $K(\Theta, 1)$. Si $x_1, x_2 \epsilon P$, alors ils sont additifs selon la norme δ, c'est-à-dire que*

(2,13) $$\delta(x_1 + x_2) = \delta(x_1) + \delta(x_2)$$

Dém. I. Si x_1 et x_2 sont linéairement dépendants (c'est-à-dire s'il existe $a_1, a_2 \epsilon R_1$, $a_1^2 + a_2^2 > 0$ et $a_1 x_1 + a_2 x_2 = \Theta$) alors ou $x_1 = \Theta$ et la condition (2,13) est verifiée, où il existe un $a \epsilon R_1$ tel que $x_2 = a x_1$. Vu le Théorème 2,11 il est $a \geqslant 0$ et nous avons

$$\delta(x_1 + x_2) = (1 + a) \cdot \delta(x_1) = \delta(x_1) + \delta(x_2).$$

II. Si x_1 et x_2 sont linéairement indépendants alors à fortiori $\delta(x_i) > 0$. Posons

$$a_i = \frac{x_i}{\delta(x_i)}$$

Nous aurons $\delta(a_i) = 1$.

De la définition du cône d'additivité, il existe un ensemble de planéité L de la sphère $K(\Theta, 1)$ tel que $a_i \epsilon L$. Les éléments x_1, x_2 étant linéairement indépendants nous aurons $a_1 \neq a_2$ et nous pouvons considérer le segment $\langle a_1, a_2 \rangle$. Donc

$$1/2 \cdot (a_1 + a_2) \epsilon \langle a_1, a_2 \rangle \subset F' K(\Theta, 1)$$

Nous aurons

$$\delta(a_1 + a_2) = 2\,\delta\,[1/2 \cdot (a_1 + a_2)] = 2 = \delta(a_1) + \delta(a_2)$$

les éléments a_1, a_2 sont additifs selon la norme, donc aussi (vu le Théorème 1,3) les éléments x_1 et x_2. C. Q. F. D.

Th. 2,14. *Si x_1 et x_2 sont linéairement indépendants et additifs selon la norme, alors ils appartiennent à un cône d'additivité de la sphère $K(\Theta, 1)$* [4]).

Dém. Supposons que x_1, x_2 soient additifs selon la norme et linéairement indépendants. Donc $x_i \neq \Theta$ et $\delta(x_i) \neq 0$. Posons

$$a_i = \frac{x_i}{\delta(x_i)}$$

Donc $\delta(a_i) = 1$. Du Théorème 1,3 il suit que a_1 et a_2 sont additifs selon la norme. Toutes leurs combinaisons linéaires avec des coefficients ayant le même signe sont additives. Les éléments x_1, x_2 étant linéairement indépendants nous aurons $a_1 \neq a_2$ et nous pouvons considérer le segment $\langle a_1, a_2 \rangle$:

$$\delta\,[z(\tau)] = \delta\,[(1 - \tau)\,a_1 + \tau\,a_2] = \delta\,[(1 - \tau)\,a_1] + \delta\,[\tau\,a_2] =$$
$$= (1 - \tau) \cdot \delta(a_1) + \tau \cdot \delta(a_2) = 1 - \tau + \tau = 1$$

pour $\tau \epsilon \langle 0,1 \rangle$.

---

[4]) Le Théorème 2,14 (et le Théorème 2,12) peuvent être facilement énoncés et démontrés pour des sphéres quelconques $K(a, \sigma)$. Il faut seulement remplacer la condition de l'indépendance linéaire de x_1 et de x_2 par la non-colinéarité de x_1, x_2, a (c'est-à-dire qu'il doit être $a \,\bar{\epsilon}\, [x_1, x_2]$) et modifier convenablement la condition d'additivité (2,13).

Or $\langle a_1, a_2 \rangle \subseteq F' K(\Theta, 1)$. Donc $\langle a_1, a_2 \rangle$ est contenu dans un ensemble de planéité de $K(\Theta, 1)$ et $x_i = \delta(x_i) \cdot a_i$ appartiennent à un cône d'additivité. C. Q. F. D.

Remarquons ici que deux différents cônes d'additivité (et deux différents ensembles de planéité) de la même sphère peuvent avoir des points (et même des morceaux des variétés linéaires) communs. Ce qui résulté de ce que $\delta(x_1 + x_2) = \delta(x_1) + \delta(x_2)$ et $\delta(x_2 + x_3) = \delta(x_2) + \delta(x_3)$ n'entraîne pas nécéssairement $\delta(x_1 + x_3) = \delta(x_1) + \delta(x_3)$.

Du Théorème 2,12 et du Théorème 2,14 il suit immédiatement

Th. 2,15. *Pour que les sphères $K(a, \sigma)$ soient faiblement convexes il faut et il suffit qu'il existe au moins deux éléments linéairement indépendants et additifs selon la norme δ.*

§ 3. Soit $C_2 \subseteq C_\delta$ une variété linéaire à deux dimensions. Nous pouvons la transformer biunivoquement en R_2 [5]). Cette transformation peut être une colinéation, c'est-à-dire qu'elle peut transformer une droite en une droite. Si nous choisissons trois éléments $a_i \in C_2$ et trois éléments $r_i \in R_2$, $i = 1, 2, 3$ et supposons que l'image de a_i est r_i, alors cette colinéation T sera definie univoquement.

Évidemment à l'aide de cette transformation les ensembles convexes sont transformés en ensembles convexes. La convéxité forte (faible) est un invariant de cette transformation.

Si nous transformons à l'aide de T le produit $C_2 \cdot K(a, \sigma)$ nous obtiendrons une visualisation de l'intersection de notre sphère et de C_2: Cela nous permettra de mieux comprendre — au moins qualitativement — la forme des sphères dans l'espace C_δ.

Plus généralement il est évident que si $C_n \subseteq C_\delta$ est une variété linéaire n dimensionnelle, alors il existe une colinéation biunivoque qui la transforme en R_n. Elle est définie univoquement par ses valeurs en $n + 1$ points.

3,1. Soit C^0 l'espace des fonctions continues dans l'intervalle $\langle 0,1 \rangle$, avec la norme

$$\delta(f) = \max_{\tau \in \langle 0,1 \rangle} |f(\tau)|$$

Transformons en R_2 l'ensemble linéaire C_2 défini par les éléments $\Theta, \tau^k, \tau^{n+k}$, [6]) $k \geq 0$, $n \geq 1$. Cette transformation T sera définie univoque-

[5]) Par R_n je comprends l'espace euclidien à n dimension, c'est-à-dire l'espace des suites à n termes $a = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, avec la norme $\delta(a) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$

[6]) $f(\tau)$ représente la valeur de f au point τ, et $f(\tau)$ réprésente f considéré comme un élément de C_δ dans les formules où l'on ne peut pas négliger son argument.

ment — par exemple — par les formules:

$$T(\Theta) = (0,0), \quad T(\hat{\tau}^k) = (1,0), \quad T(\hat{\tau}^{n+k}) = (0,1)$$

L'image du «cercle» de C_2 ayant le rayon $= 1$ dans le plan des (α, β), sera donnée par l'équation:

$$\max_{\tau \in \langle 0,1 \rangle} |\beta \tau^{n+k} + \alpha \tau^k| = 1 \tag{3,2}$$

La figure 1 montre sa résolution pour $k \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$ (pour fixer les idées nous avons admis $k = n = 1$). Le «cercle» est formé ici de deux segments de droites:

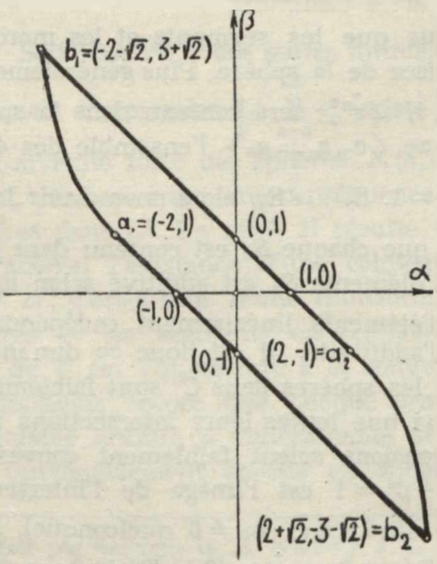
$$\beta = \pm 1 - \alpha$$

et de deux arcs de parabole du $1 + k/n$ degré:

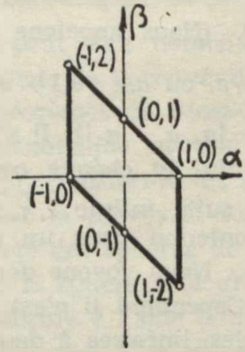
$$\beta = -\left[\frac{|\alpha|}{n+k}\right]^{1+\frac{k}{n}} \cdot n^{\frac{n}{k}} \cdot k \cdot \operatorname{sgn} \alpha$$

Soient a_i et b_i les points d'intersection de ces droites et de ces paraboles. Le point a_1 a les coordonnées $(-1 - k/n, k/n)$; les coordonnées du point b_1 sont plus difficiles à calculer — par exemple pour $k = n = 1$ elles sont $(-2 - 2\sqrt{2},\ 3 + 2\sqrt{2})$ (voir la figure 1).

La résolution de l'équation (3,2) pour $k = 0$, $n \geqslant 1$ quelconque donne un parallélogramme ayant les sommets aux points $(1,0)$, $(-1,0)$, $(-1, 2)$, $(1, -2)$ (voir la figure 2).



1



2

Nous démontrerons par exemple la dernière affirmation. Nous devons trouver le lieu géométrique des points (a, β) vérifiant l'équation

$$\max_{\tau \in \langle 0,1 \rangle} |a\tau^n + \beta| = 1$$

I. Si $a > 0$, $\beta \geqslant 0$, le maximum est atteint pour $\tau = 1$, donc l'équation de notre lieu géométrique est

$$a + \beta = 1$$

II. Si $a > 0$, $\beta < 0$ il faut envisager deux sous-cas:

1°. Si $\beta = -1$ alors $\max\limits_{\tau \in \langle 0,1 \rangle} |a\tau^n - 1| = 1$ pour chaque $0 < a \leqslant 2$.

2°. Si $-1 \leqslant \beta < 0$ nous devons avoir $a = -\beta + 1$ donc $a + \beta = 1$. Le raisonnement sera identique pour les cas $a < 0$, $\beta > 0$ et $a < 0$, $\beta < 0$ et pour $a = 0$ ou $\beta = 0$.

En résumant, l'image du «cercle» sera fourni par quatre segments de droites

$$|a + \beta| = 1 \qquad |\beta| = 1$$

3,3. On peut transformer de même l'intersection de $K(\Theta, 1) \subset C^\circ$ et de l'ensemble linéaire à trois dimensions défini par les éléments $\Theta, \hat{1}, \hat{\tau}, \hat{\tau}^2$. L'image de cette «sphère» sera un ensemble contenant sur sa surface des morceaux de plans (par exemple il contiendra un morceau qui contient le triangle $\triangle(0,1,0), (1,0,0), (0,0,1))$. Au moins deux couples de ces morceaux ont des segments comme arête commune.

3,4. Nous avons vu ci-dessus que les segments et les morceaux de plane sont contenus dans la surface de la sphère. Plus généralement: pour chaque n, le simplexe $S_n = \langle \hat{1}, \hat{\tau}, \ldots, \hat{\tau}^n \rangle$ sera contenu dans la surface de $K(\Theta, 1)$. (Nous appelons simplexe $\langle a_0, a, \ldots, a_n \rangle$ l'ensemble des éléments $z = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i a_i$ où $a_i \in \langle 0,1 \rangle$ et $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i = 1$. Si $a_i \in R_1$, alors nous avons la variété linéaire $[a_0, a, \ldots, a_n]$). Il s'ensuit que chaque S_n est contenu dans un cône d'additivité et chaque couple d'éléments S_n est additive selon la norme.

La suite infinie $\hat{1}, \hat{\tau}, \hat{\tau}^2, \ldots$ d'éléments linéairement indépendants est aussi contenue dans un cône d'additivité. (Il est donc ∞ dimensionnel).

3,5. Nous voyons donc que les sphères dans C° sont faiblement convexes. Cependant il n'est pas vrai que toutes leurs intersections avec des ensembles linéaires à deux dimensions soient faiblement convexes. Par exemple le cercle euclidien $a^2 + \beta^2 = 1$ est l'image de l'intersection de $K(\Theta, 1)$ et du plan $[\Theta, \cos 2\pi n \hat{\tau}, \sin 2\pi n \hat{\tau}]$ ($n \neq 0$ quelconque), si T est une colinéation et $T(\Theta) = (0,0)$, $T(\cos 2\pi n \hat{\tau}) = (0,1)$ $T(\sin 2\pi n \hat{\tau}) = (1,0)$.

3,6. Des exemples d'espaces qui aient des sphérès fortement convexes nous scnt fournis par les espaces L^p des fonctions sommables dans $\langle 0,1 \rangle$ avec la p-ième puissance et avec la norme

$$\delta(x) = \sqrt[p]{\int_0^1 |x(\sigma)|^p d\sigma}$$

pour $p > 1$.

Dém. Soit $x_1, x_2 \in L^p, x_1 \neq x_2$ et $\delta(x_i) = 1$. Le segment $\langle x_1, x_2 \rangle$ aura pour équation

$$z_\tau = (1 - \tau) x_2 + \tau x_1$$

De l'inégalite de Minkowski[7]) il suit que pour $\tau \in (0,1)$

$$\delta(z_\tau) = \left[\int_0^1 |(1-\tau) x_2 + \tau x_1|^p d\sigma\right]^{1/p} <$$

$$< (1-\tau)\left[\int_0^1 |x_2|^p d\sigma\right]^{1/p} + \tau\left[\int_0^1 |x_1|^p d\sigma\right]^{1/p} = (1-\tau)\cdot\delta(x_2) + \tau\cdot\delta(x_1) = 1$$

donc pour $\tau \in (0,1)$ nous avons $z_\tau \in I' K(\Theta, 1)$.

Ainsi nous avons démcntré qu'aucun segment n'est contenu dans la surface de la sphère dans L^p.

C. Q. F. D.

3,7. Soit l'espace l^2 des suites infinies $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ des nombres réels pour lesquels l'expression $\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2}$ existe et est égale à la norme.

La convexité forte des sphères $K(a,\sigma) \subset l^2$ peut être démontrée directement. Elle est aussi une conséquence immédiate de la convéxité forte des sphères dans L^2. En effet, il résulte des Théorèmes de Riesz-Fischer et de Parseval l'existance d'une colinéation isométrique et biunivoque de l^2 sur L^2, c'est-à-dire d'une transformaticn qui trensforme les sphères en sphères et les segments en segments. Donc la convexité forte des sphères de l^2 est équivalente à la convexité forte des sphères de L^2.

Remarquons encore que chaque produit de la sphère $K(a,\sigma) \subset l^2$ et d'un ensemble linéaire n dimensionnel se transforme à l'aide d'une colinéation convenablement choisie en sphère euclidienne à n dimensions.

---

[7]) Voir par exemple G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya *Inequalities*, Cambridge 1934, p. 146.

3,8. Les sphères sont faiblement convexes dans l^1. La norme est fournie ici par l'expression

$$\delta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

où $x = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Soit $a = \{1, 0, 0, 0, \ldots\}$, $b = \{0, 1, 0, 0, \ldots\}$. La colinéation du produit de $K(\Theta, 1)$ et du plan défini par les points Θ, a, b et transformant les points Θ, a, b respectivement en $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$ nous donne le carré $|\alpha| + |\beta| = 1$. Donc dans l^1 les sphères sont faiblement convexes.

Streszczenie

Oznaczmy przez C_δ przestrzeń Banacha (B) unormowaną przez $\delta(x)$. Przypuśćmy, że $K(\Theta, \sigma) \subset C_\delta$ jest kulą zamkniętą w środku Θ i o promieniu σ. Niech L będzie częścią rozmaitości liniowej leżącej na powierzchni $K(\Theta, \sigma)$. Jeśli $x_1, x_2 \epsilon L$ to $\delta(x_1 + x_2) = \delta(x_1) + \delta(x_2)$. Jeżeli x_1 i x_2 są liniowo niezależne, to i odwrotne twierdzenie jest prawdziwe.

Klasa zbiorów kierunków łączących a środek kuli $K(\mathrm{a}, \sigma)$ z częściami rozmaitości liniowych leżących na jej powierzchni jest taka sama dla każdej kuli — jest więc własnością C_δ.

§ 3 poświęcony jest metodzie unaoczniania kształtów kul $\subset C_\delta$ polegającej na kolineacyjnym (t. j. zachowującym proste) transformowaniu iloczynów kul $K(\Theta, \sigma)$ i zbiorów liniowych dwuwymiarowych na podzbiory płaszczyzny euklidesowej R_2.

Резюме

Обозначим через C_δ пространство Банаха нормированное функционалом $\delta(x)$. Предположим, что $K(\Theta, \sigma) \subset C_\delta$ является замкнутой сферой с центром Θ и радиусом σ. Пусть L будет частью линейного многообразия лежащего на поверхности $K(\Theta, \sigma)$. Если $x_1, x_2 \epsilon L$ то $\delta(x_1 + x_2) = \delta(x_1) + \delta(x_2)$. Если x_1 и x_2 линейно независимы, то и обратная теорема будет справедливой.

Класс множеств направлений, соединяющих центр a сферы $K(a, \sigma)$ с частями линейных многообразий лежащих на ее поверхности будет таким же для всякой сферы — следовательно, является свойством C_δ.

В § 3 даю метод наглядного представления сфер $\subset C_\delta$, который состоит в отображении, сохраняющем прямые, пересечений сфер и линейных множеств двух измерений на подмножества евклидовой плоскости.