

ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA

VOL. IV, 12

SECTIO A

1950

Z Seminarium Matematycznego I. Wydz. Mat.-Przyr. U. M. C. S.
Kierownik: prof. dr Mieczysław Biernacki.

Mieczysław BIERNACKI.

**Sur le 2^e théorème de la moyenne et sur l'inégalité
de Tschebycheff.**

O 2 twierdzeniu o wartości średniej i o nierówności Czebyszewa

§ 1. Je vais établir la proposition suivante qui se rattache au 2^eème théorème de la moyenne du calcul intégral:

I. Supposons que les fonctions $f(x)$, $g(x)$ intégrables¹⁾ dans un intervalle $a \leq x \leq b$ sont continues dans l'intervalle $a \leq x \leq a + \epsilon$ (ϵ est un nombre positif arbitrairement petit). Si les conditions:

$$g(a) \neq 0, \int_a^x g(x) dx \neq 0 \quad (a < x \leq b)$$

sont vérifiées et si $\varphi(x)$ est une fonction bornée positive et non croissante dans $a \leq x \leq b$, on a l'égalité:

$$\frac{\int_a^b f(x) \varphi(x) dx}{\int_a^b g(x) \varphi(x) dx} = \frac{\int_a^{\xi} f(x) dx}{\int_a^{\xi} g(x) dx} \quad (a \leq \xi \leq b)$$

Lorsque $\xi = a$ on attribue au quotient du second membre la valeur $\frac{f(a)}{g(a)}$; lorsque $\varphi(x)$ possède une dérivée $\varphi'(x)$ continue et négative on a $\xi > a$ et il n'est pas nécessaire de supposer que f et g sont continues dans le voisinage de $x = a$ et que $g(a) \neq 0$.

¹⁾ Nous considérons toujours des fonctions intégrables au sens de Riemann, donc bornées.

Démonstration. Divisons l'intervalle (a, b) en des intervalles partiels: $a = x_0 < x_1 < \dots x_{n-1} < x_n = b$.

On sait qu'en posant:

$$I_n = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \quad \text{et} \quad K_n = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x) dx$$

et en supposant que $\text{Max } |x_{i+1} - x_i| \rightarrow 0$ on a:

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n, \quad \int_a^b g(x) \varphi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n$$

En posant:

$$\varphi_i = \varphi(x_i), \quad F_i = \int_a^{x_i} f(x) dx, \quad G_i = \int_a^{x_i} g(x) dx$$

et en appliquant la transformation d'Abel on trouve que:

$$\frac{I_n}{K_n} = \frac{F_1(\varphi_1 - \varphi_2) + F_2(\varphi_2 - \varphi_3) + \dots + F_{n-1}(\varphi_{n-1} - \varphi_n) + F_n \varphi_n}{G_1(\varphi_1 - \varphi_2) + G_2(\varphi_2 - \varphi_3) + \dots + G_{n-1}(\varphi_{n-1} - \varphi_n) + G_n \varphi_n}$$

Remarquons maintenant que le quotient:

$$Q(x) = \frac{\int_a^x f(x) dx}{\int_a^x g(x) dx}$$

est, en vertu de nos hypothèses, une fonction continue de x dans l'intervalle $a \leq x \leq b$ (pour $x = a$ on attribue au quotient la valeur $f(a):g(a)$). Il prend donc dans cet intervalle toute valeur comprise entre la borne inférieure A et la borne supérieure B . Il résulte aussi des hypothèses faites que toutes les quantités g_i ont le même signe, on aura donc:

$$AG_i \leq F_i \leq BG_i$$

si tous les g_i sont positifs et

$$BG_i \leq F_i \leq AG_i$$

si tous les g_i sont négatifs ($i = 1, 2, \dots, n$). Les quantités $\varphi_{i-1} - \varphi_i$ et φ_n étant non négatives on aura donc dans tous les cas:

$$A \leq \frac{I_n}{K_n} \leq B$$

En faisant tendre n vers l'infini on voit que:

$$A \leq \frac{\int_a^b f(x) \varphi(x) dx}{\int_a^b g(x) \varphi(x) dx} \leq B$$

et le quotient $Q(x)$ étant une fonction continue la première partie du théorème la en résulte de suite.

Lorsque $\varphi(x)$ possède une dérivée continue et qui ne s'annule pas on peut procéder plus rapidement. En posant:

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx, \quad G(x) = \int_a^x g(x) dx$$

et en intégrant par parties on aura:

$$\frac{\int_a^b f(x) \varphi(x) dx}{\int_a^b g(x) \varphi(x) dx} = \frac{F(b) \varphi(b) + \int_a^b [-\varphi'(x)] F(x) dx}{G(b) \varphi(b) + \int_a^b [-\varphi'(x)] G(x) dx}$$

En supposant par exemple que $G(x) > 0$ on voit que les deux termes du dénominateur sont positifs, en appliquant le théorème de la moyenne de Cauchy on trouve d'autre part:

$$\frac{\int_a^b [-\varphi'(x)] F(x) dx}{\int_a^b [-\varphi'(x)] G(x) dx} = \frac{F(\xi)}{G(\xi)} ; \quad a \leq \xi < b$$

donc le rapport:

$$\frac{\int_a^b f(x) \varphi(x) dx}{\int_a^b g(x) \varphi(x) dx}$$

est compris entre $\frac{F(b)}{G(b)}$ et $\frac{F(\xi)}{G(\xi)}$ ce qui établit, vu la continuité de

$\frac{F(x)}{G(x)}$ dans l'intervalle $\xi \leq x \leq b$, la proposition. On démontre tout pareillement le théorème suivant:

Théorème I b. *Supposons que les fonctions $f(x)$, $g(x)$ intégrables dans un intervalle $a \leq x \leq b$ sont continues dans l'intervalle $a - \epsilon < x \leq b$ (ϵ est un nombre positif arbitrairement petit), Si les conditions:*

$$g(b) \neq 0, \int_a^b g(x) dx \neq 0 (a \leq x < b)$$

sont vérifiées et si $\varphi(x)$ est une fonction bornée, positive et non décroissante dans $a \leq x \leq b$, on a l'égalité:

$$\frac{\int_a^b f(x) \varphi(x) dx}{\int_a^b g(x) \varphi(x) dx} = \frac{\int_{\xi}^b f(x) dx}{\int_{\xi}^b g(x) dx}; \quad (a \leq \xi \leq b)$$

Lorsque $\xi = b$ on attribue au quotient la valeur $\frac{f(b)}{g(b)}$; lorsque $\varphi'(x)$ est continue et positive on a $\xi < b$ et il n'est pas nécessaire de supposer que f et g sont continues dans le voisinage de $x = b$ et que $g(b) \neq 0$.

§. 2. Nous allons maintenant obtenir quelques applications de théorème précédent.

On doit à Tschébycheff la proposition suivante: „Si $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont intégrables et toutes les deux croissantes ou toutes les deux non décroissantes dans (a, b) , on a l'inégalité

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \varphi(x) dx$$

Si l'une de fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ est non croissante et l'autre non décroissante on a l'inégalité contraire. Le signe d'égalité n'a lieu que si l'une de fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ est constante." Plus généralement: „sous les conditions du théorème précédent, $p(x)$ étant une fonction positive et intégrable on a l'inégalité:

$$\int_a^b p(x) dx \cdot \int_a^b f(x) \varphi(x) p(x) dx \geq \int_a^b f(x) p(x) dx \cdot \int_a^b \varphi(x) p(x) dx \cdot$$

(ou l'inégalité contraire).“ On a aussi montré²⁾ qu'il n'est pas nécessaire de supposer que les fonctions f et φ soient monotones dans (a, b) , il suffit qu'elles soient „également croissantes“ (dans le cas du signe $>$) et „contrairement croissantes“ (dans le cas du signe $\leq$), ceci signifiant que l'on a pour tout couple x, y des valeurs de l'intervalle (a, b) :

$$[f(x) - f(y)] \cdot [\varphi(x) - \varphi(y)] \geq 0$$

dans le premier cas et l'inégalité contraire dans le second. On a aussi étendu l'inégalité de Tchebycheff au cas des intégrales multiples.

Remplaçons d'abord dans les théorèmes Ia, Ib, $f(x)$ par $f(x)p(x)$ et $g(x)$ par $p(x)$, $p(x)$ étant positive; il viendra:

$$(1a) \quad \frac{\int_a^b p(x) f(x) \varphi(x) dx}{\int_a^b p(x) \varphi(x) dx} = \frac{\int_a^{\xi} p(x) f(x) dx}{\int_a^{\xi} p(x) dx}$$

dans le cas où $\varphi(x)$ est positive et non croissante et

$$(1b) \quad \frac{\int_a^b p(x) f(x) \varphi(x) dx}{\int_a^b p(x) \varphi(x) dx} = \frac{\int_{\xi}^b p(x) f(x) dx}{\int_{\xi}^b p(x) g(x) dx}$$

dans le cas où $\varphi(x)$ est positive et non décroissante.

On en déduit de suite l'énoncé suivant:

II. Si $f(x)$, $\varphi(x)$, $p(x)$ sont intégrables dans (a, b) , $p(x)$ positive et $\varphi(x)$ non négative et non croissante (non décroissante) dans cet intervalle et si l'on a:

$$\left| \frac{\int_a^x p(x) f(x) dx}{\int_a^x p(x) dx} \right| \leq M, \quad a < x \leq b$$

²⁾ cf. Hardy, Littlewood, Pólya. Inequalities. Cambridge, 1934, pp. 43 et 168.

dans le premier cas et

$$\left| \frac{\int_a^b p(x) f(x) dx}{\int_a^b p(x) dx} \right| \leq M, \quad a \leq x \leq b.$$

dans le second, on aura aussi:

$$\left| \int_a^b p(x) f(x) \varphi(x) dx \right| \leq M \left| \int_a^b p(x) \varphi(x) dx \right|$$

Dans la démonstration on peut supposer d'abord que $\varphi(x)$ possède une dérivée continue qui ne s'annule pas; dans ce cas le théorème est une conséquence immédiate de l'égalité 1a ou 1b; dans le cas général on fait une approximation de $\varphi(x)$ par les fonctions de la classe considérée tout-à-l'heure et on effectue un passage à la limite. Dans le cas où $p(x) \equiv 1$ le théorème II a été démontré directement par I. P. Natanson³⁾.

Nous allons voir maintenant que les inégalités (1a) et (1b) permettent d'obtenir une généralisation nouvelle de l'inégalité de Tschebycheff; il suffit notamment qu'une des fonctions qui figurent dans cette inégalité ne soit qu'„en moyenne monotone“.

III. Supposons que $f(x)$, $\varphi(x)$, $p(x)$ sont intégrables dans $a \leq x \leq b$ et que $p(x)$ est positive dans cet intervalle. Si les fonctions

$$\varphi(x) \text{ et } f_1(x) = \frac{\int_a^x p(x) f(x) dx}{\int_a^x p(x) dx}$$

sont non croissantes ou bien si

$$\varphi(x) \text{ et } f_2(x) = \frac{\int_x^b p(x) f(x) dx}{\int_x^b p(x) dx}$$

sont non décroissantes dans (a, b) on a l'inégalité:

³⁾ Doklady Akad. Nauk SSSR (N. S.), 56, (1947), pp. 911—913. Une inégalité un peu plus précise a été démontrée par R. P. Boas, Jr. (Mathematical Reviews, 9, (1948), p. 136—137).

$$\int_a^b p(x) dx \cdot \int_a^b p(x) f(x) \varphi(x) dx \geq \int_a^b p(x) f(x) dx \cdot \int_a^b p(x) \varphi(x) dx$$

Si $\varphi(x)$ est non croissante et $f_1(x)$ non décroissante ou bien si $\varphi(x)$ est non décroissante et $f_2(x)$ non croissante dans (a, b) c'est l'inégalité contraire qui a lieu.

On constate sans peine que si $f(x)$ croît (décroît) dans (a, b) , $f_1(x)$ et $f_2(x)$ croissent (décroissent) dans le même intervalle, le théorème III contient donc bien le théorème de Tschébycheff.

On peut supposer dans la démonstration que $\varphi(x)$ soit positive car on voit immédiatement que l'on peut ajouter à $\varphi(x)$ une constante sans modifier l'inégalité, on peut aussi supposer que $\varphi(x)$ possède une dérivée continue et qui ne s'annule pas, car on est ramené à ce cas par des approximations. Cela posé, le théorème III est une conséquence immédiate des inégalités (1a) et (1b).

Remarque I. Il résulte de la démonstration que le théorème III subsiste lorsque $p(x)$, sans être partout positive, est telle que

$$\int_a^x p(x) dx > 0, \quad a < x \leq b$$

ou bien

$$\int_x^b p(x) dx > 0, \quad a \leq x < b$$

suivant les cas.

Remarque II. En supposant que les fonctions considérées $f(x)$, $g(x)$, $p(x)$ sont constantes dans les intervalles $[a + \frac{i-1}{n}(b-a), a + \frac{i}{n}(b-a)]$ ($i=1, 2, \dots, n$) on obtient immédiatement des généralisations correspondantes de l'inégalité de Tschébycheff relatives aux suites finies.

§ 3. On peut écrire l'inégalité de Tschébycheff sous une forme plus symétrique:

$$(2) \quad \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \cdot \int_a^b g(x) \psi(x) dx \geq \int_a^b f(x) \psi(x) dx \cdot \int_a^b g(x) \varphi(x) dx$$

Cette inégalité vaut si les fonctions intégrables $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sont telles, que $g(x)\psi(x) > 0$ et lorsque les quotients $\frac{f(x)}{g(x)}$ et $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ sont également croissants, l'inégalité contraire ayant lieu lorsque ces deux quotients sont contrairement croissants (cf. la définition de ces notions au § 2). Il suffit, en effet, de poser $\frac{f}{g} = f^*$, $\frac{\varphi}{\psi} = \varphi^*$ et $\psi = p$ pour être ramené à l'inégalité de l'énoncé III (on a f^* et φ^* à la place de f et de φ). Cette nouvelle forme (2) de l'inégalité de Tschebyscheff peut être commode dans les applications. En supposant par exemple que $f(x) > 0$, $g(x) = [f(x)]^s$, $\varphi(x) \equiv 1$, $\psi(x) = x^p$, $p > 0$ on obtient pour $a > 0$ l'inégalité:

$$\int_a^b f dx \cdot \int_a^b x^p f^s dx > \int_a^b x^p f dx \cdot \int_a^b f^s dx$$

valable lorsque f est non décroissante et $s > 1$ ou lorsque f est non croissante et $s < 1$, l'égalité contraire ayant lieu lorsque f est non croissante et $s > 1$ ou lorsque f est non décroissante et $s < 1$. L'inégalité (2) s'applique évidemment dans des conditions plus générales que celles que nous venons de formuler; on les déduit sans peine du théorème III.

Streszczenie.

W pracy dowodzę następującego twierdzenia:

Jeśli $f(x)$, $g(x)$ są funkcjami całkowalnymi w przedziale $a \leq x \leq b$ $\varphi(x)$ jest dodatnia i $\varphi'(x)$ ciągła i ujemna w tym przedziale i jeśli:

$$\int_a^x g(x) dx \neq 0 \text{ dla } a < x \leq b$$

to zachodzi równość

$$\frac{\int_a^b f(x) \varphi(x) dx}{\int_a^b g(x) \varphi(x) dx} = \frac{\int_a^{\xi} f(x) dx}{\int_a^{\xi} g(x) dx} \quad (a < \xi \leq b),$$

Dowodzę też analogicznego twierdzenia w przypadku, gdy $\varphi'(x)$ jest dodatnia. Stosując te twierdzenia, wykazuję, że nierówność całkowa Czebyszewa zachodzi i w tym przypadku, gdy jedna z wchodzących w nią funkcji jest tylko „średnio monotoniczna“.