ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. I, Nr 3, SECTIO A 1946

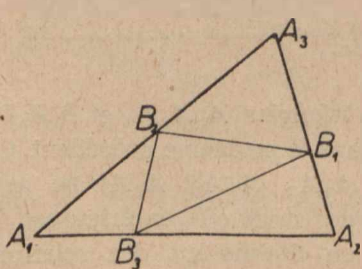
Z Seminarium Matematycznego II. Wydziału Przyrodniczego U. M. C. S. w Lublinie
Kierownik: Prof. Dr Jan G.-Mikusiński

Jan G.-Mikusiński

Sur quelques propriétés du triangle[1]
(O kilku własnościach trójkąta)

Nous résolvons ici deux problèmes de la géométrie du triangle. Les formules que nous obtenons, cunduisent aisément, dans certains cas particuliers, aux théorèmes de Menelaos, de Ceva, et à quelques autres propriétés du triangle.

1. **Problème I.** *On inscrit dans un triangle donné $A_1A_2A_3$ un autre triangle $B_1B_2B_3$ de sorte que les sommets B_1, B_2, B_3 divisent les côtés A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 respectivement dans les rapports p_1, p_2, p_3. On demande la relation entre l'aire P du triangle $A_1A_2A_3$ et l'aire Q du triangle $B_1B_2B_3$.*



Résolution.

$$\triangle A_1B_3B_2 = \frac{1}{1+p_2}\triangle A_1B_3A_3 = \frac{1}{1+p_2}\,\frac{p_3}{1+p_3}P;$$

[1]) Les problèmes résolus dans cet article ont été suggérés par la lecture du livre „Kalejdoskop matematyczny" de M. H. Steinhaus.

de même

$$\triangle A_2B_1B_3 = \frac{1}{1+p_3}\,\frac{p_1}{1+p_1}P,$$

$$\triangle A_3B_2B_1 = \frac{1}{1+p_1}\,\frac{p_2}{1+p_2}P.$$

Donc

$$Q = \left(1 - \frac{1}{1+p_2}\,\frac{p_3}{1+p_3} - \frac{1}{1+p_3}\,\frac{p_1}{1+p_1} - \frac{1}{1+p_1}\,\frac{p_2}{1+p_2}\right)P,$$

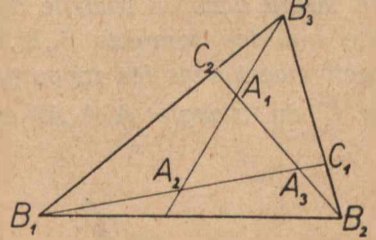
c'est-à-dire

(1) $$Q = \frac{1+p_1p_2p_3}{(1+p_1)(1+p_2)(1+p_3)}P$$

On peut démontrer que cette formule est encore valable, lorsqu'on admet des divisions extérieures des côtés (et aires négatives des triangles).

On déduit sans peine de la formule ci-dessus qu' *une condition nécessaire et suffisante pour que les points de division B_1, B_2, B_3 soient situés sur une même droite, est que $1 + p_1p_2p_3 = 0$* (Théorème de Menelaos).

2. Problème II. *On joint les sommets B_1, B_2, B_3 d'un triangle donné aux points C_1, C_2, C_3 qui divisent les côtés B_2B_3, B_3B_1, B_1B_2 respectivement dans les rapports q_1, q_2, q_3. Les points d'intersection des droites B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 sont désignés respectivement par A_1, A_2, A_3. On demande la relation entre l'aire P du triangle $A_1A_2A_3$ et l'aire Q du triangle $B_1B_2B_3$.*



Résolution. Les triangles $A_1A_2A_3$ et $B_1B_2B_3$ sont maintenant dans la même relation que dans le problème précédent. Or, les rapports p_1, p_2, p_3 de division des côtés A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 ne sont pas connus (Sur la figure 2 on a marqué des divisions extérieures). Le problème peut être ramené au précédent, en établissant des relations entre les nombres p_1, p_2, p_3 et q_1, q_2, q_3.

Considérons le triangle $A_1B_2B_3$ est désignons respectivement par p_1', p_2', p_3' les rapports de division de ses côtés par les points C_1, A_2, A_3. Ces 3 points se trouvent sur une droite, on a donc

(2) $$1 + p_1'p_2'p_3' = 0.$$

Or, on déduit de la figure 2 que l'on a:

$$p_1' = q_1;$$

$$p_2' = \frac{\overrightarrow{B_2 A_1}}{\overrightarrow{A_2 A_1}} = \frac{\overrightarrow{B_3 A_2}}{-\overrightarrow{B_3 A_2} - \overrightarrow{A_1 B_3}} = -\frac{1}{1 + \dfrac{\overrightarrow{A_1 B_3}}{\overrightarrow{B_3 A_1}}} = -\frac{1}{1+p_3};$$

$$p'_3 = \frac{\overrightarrow{A_1 A_3}}{\overrightarrow{A_3 B_2}} = \frac{-\overrightarrow{B_2 A_1} - \overrightarrow{A_3 B_2}}{\overrightarrow{A_3 B_2}} = -\frac{1 + \dfrac{\overrightarrow{A_3 B_2}}{\overrightarrow{B_2 A_1}}}{\dfrac{\overrightarrow{A_3 B_2}}{\overrightarrow{B_2 A_2}}} = -\frac{1+p_2}{p_2}.$$

La relation (2) se transforme donc en

(3) $$1 + q_1 \frac{1}{1+p_3} \cdot \frac{1+p_2}{p_2} = 0,$$

d'où

(4) $$q_1 = -\frac{p_2(1+p_3)}{1+p_2}$$

et, par symétrie,

(5) $$\begin{cases} q_2 = -\dfrac{p_3(1+p_1)}{1+p_3}, \\ q_3 = -\dfrac{p_1(1+p_2)}{1+p_1}. \end{cases}$$

En formant le produit des 3 égalités (4), (5), on trouve

(6) $$q_1 q_2 q_3 = -p_1 p_2 p_3.$$

On tire sans peine de (4), (5)

$$\frac{1}{1+p_2} - q_1 \frac{1}{1+p_3} = 1,$$

$$-q_2 \frac{1}{1+p_1} + \frac{1}{1+p_3} = 1,$$

$$\frac{1}{1+p_1} - q_3 \frac{1}{1+p_2} = 1.$$

En résolvant le système de ces 3 égalités par rapport aux $\frac{1}{1+p_1}$, $\frac{1}{1+p_2}$, $\frac{1}{1+p_3}$, on obtient

(7) $$\begin{cases} \dfrac{1}{1+p_1} = \dfrac{1 + q_3 + q_3 q_1}{1 - q_1 q_2 q_3}, \\ \dfrac{1}{1+p_2} = \dfrac{1 + q_1 + q_1 q_2}{1 - q_1 q_2 q_3}, \\ \dfrac{1}{1+p_3} = \dfrac{1 + q_2 + q_2 q_3}{1 - q_1 q_2 q_3}. \end{cases}$$

Les relations (1), (2) et (7) donnent aisément

$$(8)\qquad P=\frac{(1-q_1q_2q_3)^2}{(1+q_1+q_1q_2)\,(1+q_2+q_2q_3)\,(1+q_3+q_3q_1)}\,Q.$$

3. Supposons que tous les q_1, q_2, q_3 soient finis et posons

$$\begin{aligned} C &= 1-q_1q_2q_3,\\ D_1 &= 1+q_2+q_2q_3,\\ D_2 &= 1+q_3+q_3q_1,\\ D_3 &= 1+q_1+q_1q_2; \end{aligned}$$

on peut écrire alors la formule (8) sous la forme

$$P=\frac{C^2}{D_1\,D_2\,D_3}\,Q.$$

Les nombres C, D_1, D_2, D_3 possèdent la propriété suivante:

Si deux quelconques des nombres C, D_1, D_2, D_3 s'annulent, tous les quatres s'annulent.

Pour le démontrer, designons par α, β, γ une permutation cyclique arbitraire des nombres 1, 2, 3 (c'est-à-dire l'une quelconque des permutations 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2). Nous distinguons deux cas:

a) $C=D_\alpha=0$,

c'est-à-dire

$$(9)\qquad 1+q_\beta+q_\beta q_\gamma=0,$$

$$(10)\qquad 1-q_\alpha q_\beta q_\gamma=0.$$

On voit d'après (9) que $q_\beta\neq 0$. En retranchant (10) de (9), on obtient

$$q_\beta(1+q_\gamma+q_\gamma q_\alpha)=q_\beta D_\beta=0.$$

d'un $D_\beta=0$. La permutation α,β,γ étant tout à fait arbitraire, on a sûrément $C=D_1=D_2=D_3=0$ dans le cas considéré.

b) $D_\alpha=D_\beta=0$,

c'est-à-dire

$$(9)\qquad 1+q_\beta+q_\beta q_\gamma=0,$$

$$(11)\qquad 1+q_\gamma+q_\gamma q_\alpha=0.$$

En vertu de a) il suffit de démontrer que $C=0$. En multipliant (9) par q_α, (11) par q_β, et en formant ensuite leur somme, on a

$$2q_\alpha q_\beta q_\gamma+(q_\beta+q_\beta q_\gamma)+q_\alpha(1+q_\beta)=0,$$

d'où, en vertu de (9) et (11),

$$2q_\alpha q_\beta q_\gamma-1-q_\alpha\cdot q_\beta q_\gamma=0$$

c'est-à-dire $C=0$.

4. Lorsque les droites t_α et t_β qui joignent respectivement les points B_α avec C_α et B_β avec C_β deviennent parallèles (les nombres q_1, q_2, q_3 restant finis), l'aire Q croît indéfiniment et l'un au moins des nombres D_1, D_2, D_3 doit s'annuler. Chaque position des droites t_α, t_β détermine les

nombres q_α, q_β. Lorsque t_α et t_β sont fixés, on peut toujours trouver un tel nombre q_γ que $D_\alpha \neq 0$ et $D_\beta \neq 0$. Cela posé, on a $D_\gamma = 0$. Comme D_γ ne dépend pas de la position de t, ou, ce qui revient au même, de la valeur de q_γ, on a

$$t_\alpha \parallel t_\beta \supset D_\gamma = 0.$$

Nous démontrerons qu'on a de même

$$D_\gamma = 0 \supset t_\alpha \parallel t_\beta.$$

Supposons, en effet, que pour deux droites fixées on a $D = 0$. Soient q_α et q_β les nombres correspondants. On mène par le point B_β une droite t'_β parallèle à t_α. En désignant par q'_β le nombre correspondant, on a

$$1 + q_\alpha + q_\alpha q'_\beta = 0.$$

Or, on a aussi

$$1 + q_\alpha + q_\alpha q_\beta = 0$$

et par suite $q'_\beta = q_\beta$, ce qui prouve que les droites t'_β, t_β sont identiques. Alors:

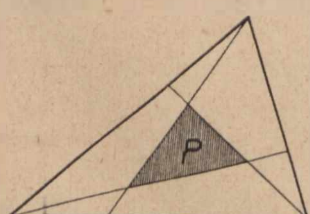
Une condition nécessaire et suffisante pour que les droites t_α et t_β soient parallèles (q_1, q_2, q_3 étant finis), est que $D_\gamma = 0$.

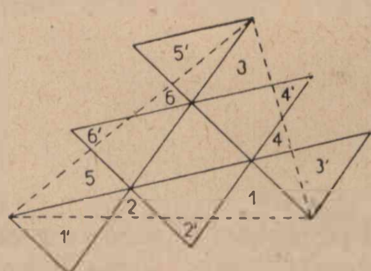
Lorsque les droites concourent dans un point, l'aire P devient nulle et l'on a $C = 0$. D'autre part, lorsque $C = 0$ et $D_i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3)$, on a $P = 0$ et les droites t_1, t_2, t_3 se rencontrent dans un point. Lorsqu'enfin $C = D_1 = D_2 = D_3 = 0$, toutes les droites t_1, t_2, t_3 sont parallèles entre elles et on peut dire qu'elles se rencontrent à l'infini. Ainsi donc:

Une condition nécessaire et suffisante pour que les droites t_1, t_2, t_3 soient concourantes (q_1, q_2, q_3 étant finis) est que $C = 0$ (Théorème de Ceva).

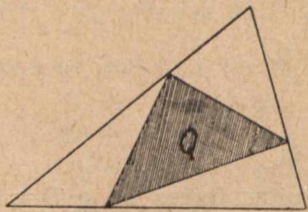
D'après ce que nous venons de dire on peut attribuer à chacun des facteurs de (8) une interprétation géométrique.

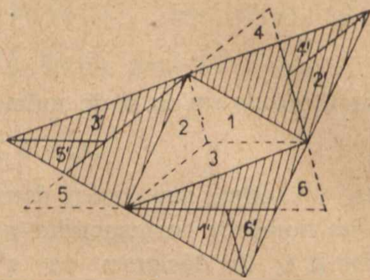
5. Si $q_1 = q_2 = q_3 = 2$, la formule (8) donne $P = \frac{1}{7} Q$. Cette égalité peut être illustrée d'une manière bien suggestive par la construction que voici:





Une construction analogue peut être appliquée pour illustrer le problème 1 dans le cas p. e. $p_1 = p_2 = p_3 = 2$, $Q = \frac{1}{3} P$:





Remarque faite pendant la correction des épreuves. M. E. Pelcer m'a fait apprendre que la formule (8) se trouve aussi établie dans le livre H. Dörrie, *Mathematische Miniaturen* (Breslau, 1943). p. 41—42. La démonstration de M. Dörrie s'appuie sur le théorème de Ceva et celui d'Aubel. Ma démonstration directe a été obtenue en 1939, mais, à cause de l'occupation allemande en Pologne, elle n'avait pu être publiée.

Streszczenie

W artykule powyższym rozwiązujemy 2 zadania dotyczące trójkątów. Z kształtu otrzymanych wzorów wynikają łatwo twierdzenia Menelaosa i Cevy oraz pewne inne własności trójkąta.

CZCIONKAMI DRUKARNI UNIWERSYTETU POZNAŃSKIEGO K-0658
Druk ukończono 17. 12. 1947. Nakład 750 egz. — Papier satyn. kl. V — 70/100 cm, 70 gr