ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. I. Nr 1 SECTIO A 1946

Z Seminarium Matematycznego I Wydz. Przyr. U. M. C. S.
Kierownik: prof. dr. Mieczysław Biernacki

Mieczysław Biernacki

Sur les valeurs moyennes des fonctions sousharmoniques
(O wartościach średnich funkcyj podharmonicznych)

MM. Hardy et Littlewood ont établi la proposition suivante[1]): „Si $f(z)=f(re^{i\theta})$ est une fonction holomorphe dans le cercle $|z| \leq 1$ et si λ est un entier positif, on a, en posant $F(\theta) = \underset{0 \leq r \leq 1}{\mathrm{Max}} |f(re^{i\theta})|$, l'inégalité:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [F(\theta)]^{\lambda} d\theta \leq A \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{\theta i})|^{\lambda} d\theta$$

où A est une constante numérique", et ils ont posé la question de savoir si la proposition subsiste pour tout λ positif (Plus tard ils ont d'ailleurs répondu affirmativement à cette question). Dans ce travail je me propose d'établir des inégalités analogues dans lesquelles le module $|f|$ sera remplacé par une fonction u *continue, non négative et sousharmonique*[2])

[1]) *Acta Math. 54, 1930, pp. 81 — 116.*

[2]) Une fonction $u(x, y)$ est sousharmonique (certains auteurs disent subharmonique) dans un domaine D si x_0, y_0 étant un point quelconque de D on a

$$u(x_0, y_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\, d\theta$$ dès que le cercle de centre x_0, y_0 et de rayon r est intérieur à D. Si u a des dérivées secondes continues la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit sousharmonique est qu'elle vérifie l'inégalité $\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} \geq 0$ En ce qui concerne les propriétés des fonctions sousharmoniques cf F. Riesz, *Acta Szeged* 1. et 2. *Proc. Lond. Mat. Soc. (2), 23, Acta Math. 48 et 54.* Littlewod, *Journ. Lond. Mat. Soc.* 2. *Proc. Lond. Mat. Soc.* (2). 28. Hardy, Ingham et Polya, *Proc. Roy. Soc. A* 113, *Proc. Lond. Mat. Soc.* (2), 28. Montel, *Journal de mathématiques pures et appliquées 1928* ainsi que le livre de G. Julia: *Principes géométriques d'analyse, 2 partie, Gauthier-Villars, Paris, 1932, pp. 115 — 120.*

dans un cercle. Il résulte de l' une des inégalités obtenues que la proposition de Hardy-Littlewood subsiste pour tout λ positif. (cf. l'énoncé III) $u(x, y)$ étant donc une fonction continue, non négative et sousharmonique dans le cercle $x^2 + y^2 \leq r^2$ [3]) je vais introduire pour abréger des notations suivantes (r, θ ou t, θ désignent des coordonnées polaires):

$$\varphi(r, u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underset{0 \leq t \leq r}{\mathrm{Max}}\, u(t, \theta)\, d\theta, \quad I(r, u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \theta)\, d\theta$$

Une fonction u sousharmonique dans un domaine limité par une courbe de Jordan simple et fermée est, dans ce domaine, inférieure ou égale à la fonction harmonique qui prend sur la courbe les mêmes valeurs que u; il en résulte qu' il suffira dans toutes les démonstrations de considérer le cas où u est *harmonique*.

Nous supposerons d'abord que $u(x, y)$ est harmonique dans le cercle $x^2 + y^2 \leq 1$ et que $0 < r < 1$. En utilisant la formule de Poisson et en supposant que le maximum de $u(t, \theta)$ dans l'intervalle $0 \leq t \leq r$ est atteint pour $t = t(\theta)$ on a l'égalité:

$$(1) \qquad \varphi(r, u) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \left| u(1, \varphi) \int_0^{2\pi} \frac{1 - [t(\theta)]^2}{1 + [t(\theta)]^2 - 2t(\theta) \cos(\varphi - \theta)}\, d\theta \right| d\varphi$$

L' intégrale intérieure ne dépasse pas l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{+\pi} M(\psi)\, d\psi,$$

où $M(\psi)$ désigne le maximum de la fonction $(1 - t^2) : (1 + t^2 - 2t \cos \psi)^{-1}$ dans l'intervalle $0 \leq t \leq r$. En posant $\psi_0 = \arccos 2r(1 + r^2)^{-1}$ on trouve que le maximum $M(\psi)$ est atteint pour $|\psi| \leq \psi_0$ lorsque $t = r$,

pour $|\psi_0| \leq |\psi| < \frac{\pi}{2}$ lorsque $t = (1 - \sin \psi) : \cos \psi$ et l'on a alors

$M(\psi) = (\sin \psi)^{-1}$, pour $|\psi| \geq \frac{\pi}{2}$ lorsque $t = 0$.

Il résulte de la valeur de ψ_0 que $\psi_0 < \frac{\pi}{2} \sin \psi_0 < \pi(1-r)$. D'autre part

$\frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos\psi} < \frac{2}{1 - r}$, on a donc $\int_{-\psi_0}^{\psi_0} M(\psi) d\psi < 4\pi$. On trouve ensuite

$\int_{\psi_0}^{\pi/2} M(\psi)\, d\psi = \log \frac{1 + r}{1 - r}$ et en définitive: $\int_{-\pi}^{+\pi} M(\psi)\, d\psi < 2 \log \frac{1 + r}{1 - r} + 5\pi$.

---

[3]) c. à. d. le dans le cercle $x^2 + y^2 < r^2 + \varepsilon$ où ε est un nombre positif suffisamment petit.

Or d'après le théorème de *Gauss* on a $I(1,u) = I(r,u)$, on obtient donc, d'après (1), en remplaçant encore le cercle $x^2 + y^2 \leq 1$ par le cercle $x^2 + y^2 \leq R^2$, l'énoncé suivant

I. *Si $u(x, y)$ est une fonction continue non négative et sousharmonique à l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 < R^2$ et si $o < r < R$, on a*

$$\varphi(r, u) \leq \left| \frac{1}{\pi} \log \frac{R+r}{R-r} + \frac{5}{2} \right| I(r, u)$$

Le facteur qui multiplie $I(r,u)$ ne peut être amélioré (sauf en ce qui concerne la constante $\frac{5}{2}$): en effet, dans le cas de la fonction:

$$u = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta} = R\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \quad (z = re^{i\theta})$$

harmonique et positive dans le cercle $x^2 + y^2 < 1$ on a, d'après les calculs effectués plus haut,

$$\varphi(r,u) > \frac{1}{\pi} \log \frac{1+r}{1-r} \text{ et } I(r,u) = 1$$

Nous allons utiliser maintenant l'énoncé suivant du à M *A. Zygmund*[1]): „Si $f(z) = u + iv$ est holomorphe dans le cercle $|z| < 1$ on a pour $z = re^{i\theta}$ et $r < 1$:

$$I(r, |v|) \leq |v(o)| + B.\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})| \overset{+}{\log} |u(re^{i\theta})| \, d\theta$$

où B est une constante numérique et $\overset{+}{\log} x = \log x$ si $x > 1$ et $\overset{+}{\log} x = o$ si $x < 1$". Supposons que u soit harmonique et non négative dans le cercle $x^2 + y^2 < 1$ et formons la fonction analytique $f(z) = u + iv$, $v(o) = o$, dont $u(x, y)$ est la partie réelle. En appliquant successivement les théorèmes de Hardy-Littlewood et de Zygmund on obtient des inégalités:

$$\varphi(r,u) = \varphi(r, |f|) \leq A\,I(r, |f|) \leq A\,[I(r,u) + I(r, |v|)]$$

et l'énoncé suivant:

II. *Si $u(x, y)$ est une fonction continue, non négative et sousharmonique à l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 < R^2$ on a pour $o < r < R$:*

$$\varphi(r, u) < A\,I(r,u) + AB.\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \theta) \overset{+}{\log}\, u(r, \theta)\, d\theta$$

où A et B désignent des constantes numériques des théorèmes de Hardy-Littlewood et de Zygmund respectivement[2]).

---

[1]) *Fundamenta Mat.* 13, 1924. cf. aussi *Stein, Journ. Lond. Mat. Soc.* 8, 1933.

[2]) De l'énoncé II on peut déduire l'énoncé I (avec d'autres valeurs des constantes) en remarquant que si $f(z)$ est holomorphe et à partie réelle positive dans le cercle $|z| < 1$ et si $f(o) = 1$ on a $|f(z)| \leq (1+r)(1-r)^{-1}$ pour $|z| \leq r$ (cf. p. ex. *G. Julia* loc. cit. [2]) p. 8) ou *Pólya-Szegö, Aufgaben u. Lehrsätze aus der Analysis, Berlin, J. Springer,* 1925. *Bd I, Aufgabe III 284).*

On doit à *M. Riesz* le théorème que voici: [6])
Si $f(z) = u + iv$ est holomorphe dans le cercle $|z| \le r$ et si $v(o) = o$, on a pour tout $p > 1$ $I(r, |f|^p) \le A(p)\, I(r, |u|^p)$ où $A(p)$ ne dépend que de p". D'après *M. Stein* [7]) on peut poser $A(p) = (1-p^{-1})^{-1}$ lorsque $1 < p \le 2$ et $A(p) = 2^{-\frac{p}{2}} p^p$ lorsque $p \ge 2$. En supposant que $u \ge o$, que p soit un entier ≥ 2 et en appliquant successivement les théorèmes de Hardy-Littlewood et de Riesz on obtient: $\varphi(r, u^p) \le \varphi(r, |f|^p) \le A I(r, |f|^p) \le A\, A(p)\, I(r, u^p)$ et l'inégalité:

$$(2) \qquad \varphi(r, u^p) \le A\, A(p)\, I(r, u^p)$$

s'étend de suite à toute fonction u non négative et sousharmonique [8])
Considérons maintenant une fonction $f(z)$ holomorphe dans le cercle $|z| \le 1$, $|f(z)|^\lambda$ est, quelque soit le nombre positif λ, sousharmonique dans ce cercle. En posant dans l'inégalité (2) $u = |f(z)|^{\frac{\lambda}{2}}$ et $p = 2$ on voit que $\varphi(r, |f|^\lambda) \le 2\, A I(r, |f|^\lambda)$ c. à. d. que

III. L'énoncé de Hardy-Littlewood cité au début de ce travail est valable pour tout $\lambda > o$, à la condition que l'on y remplace A par $2\,A$.
En profitant de l'énoncé III nous pouvons maintenant écrire l'inégalité (2) en y remplaçant A par $2\,A$, pour tout $p > 1$, nous obtenons, ainsi l'énoncé suivant:

IV. Si $u(x, y)$ est une fonction continue, non négative et sousharmonique à l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 < R^2$ et si $p > 1$ on a pour $o < r < R$:

$$\varphi(r, u^p) \le 2\, A \cdot A(p)\, I(r, u^p)$$

où A est la constante numérique du théorème de Hardy-Littlewood et où $A(p) = (1-p^{-1})^{-1}$ lorsque $1 < p \le 2$ et $A(p) = \sqrt{2^{-p}} \cdot p^p$ lorsque $p \ge 2$, Si p est un entier on peut supprimer le facteur 2 dans le second membre de l'inégalité.

Streszczenie

Badam zależność pomiędzy zwykłą średnią:

$$I(r, u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \theta)\, d\theta$$

funkcji podharmonicznej i nieujemnej $u(r, \theta)$ a średnią wprowadzoną przez Hardy'ego i Littlewooda:

[6]) *Mathem Zeitschrift, 27, 1928.*
[7]) *Journ. Lond. Mat, Soc. 8, 1933.*
[8]) cf. la remarque qui suit la définition des expressions Φ *(r, u)* et *I(r, u)*.

$$\Phi\,(r, u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname*{Max}_{0 \leq t \leq r} u\,(t, \theta)\, d\theta$$

Jeśli $u(r, \theta)$ jest funkcją podharmoniczną i nieujemną w kole $r < R$ to zachodzą nierówności:

$$\text{I.}\ \Phi\,(r, u) \leq \left|\frac{1}{\pi}\log\frac{R+r}{R-r} + \frac{5}{2}\right| I\,(r, u)$$

$$\text{II.}\ \Phi\,(r, u) \leq A\ I\,(r, u) + AB \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r, \theta)\ \overset{+}{\log}\ u\,(r, \theta)\, d\theta$$

(A i B są stałymi liczbowymi)

$$\text{III.}\ \Phi\,(r, u^p) \leq 2\,A \cdot A\,(p)\ I\,(r, u^p) \qquad (p > 1)$$

(A jest stałą liczbową, $A(p) = (1 - p^{-1})^{-1}$ gdy $p < 2$, $A(p) = 2^{-\frac{p}{2}} p^p$ gdy $p \geq 2$).