ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. I. Nr 1 SECTIO A. 1946

Z Seminarium Matematycznego I Wydziału Przyrodniczego U. M. C. S.
Kierownik: Prof. dr Mieczysław Biernacki

Mieczysław Biernacki

Sur une proposition de Bieberbach - Eilenberg

O twierdzeniu Bieberbacha - Eilenberga

M. Bieberbach a établi que si $f(z) = a_1 z + \dots + a_n z^n \dots$ est holomorphe et univalente dans le cercle $|z| < 1$ et si l'on a $f(z_1) \neq 1 : f(z_2)$ pourvu que $|z_1| < 1$ et $|z_2| < 1$, alors on a $|a_1| \leq 1$, l'égalité n'ayant lieu que si $f(z) = e^{i\theta} z$ [1].

M. Eilenberg a montré que l'on peut supprimer dans cet l'énoncé le mot „univalent". [2]) Je me propose de montrer que l'extension de M. Eilenberg constitue un fait général; on a, en effet, l'énoncé suivant: *Supposons que la fonction $\varphi(w)$ effectue une transformation topologique (c. à. d. continue et biunivoque) de la sphère de Riemann en elle-même [3]). En posant $\varphi(\infty) = a_0$ considérons la famille de fonctions:*

$$f(z) = a_0 + a_1 z \dots + a_n z^n + \dots$$

holomorphes dans le cercle $|z| < 1$ et telles que si $f(z)$ prend dans ce cercle une valeur w elle n'y prend pas la valeur $\varphi(w)$. Dans ces conditions le coefficient a_1 est uniformément borné pour toutes les fonctions

1) *Math Annalen, 77, 1916.*

2) *Fundamenta Math. 25, 1935.*

3) w et $\Phi(w)$ désignent, comme d'habitude, des nombres complexes auxquels correspondent par la projection stéréographique des points de la sphère. M. Eilenberg considére, lui aussi, des transformations topologiques de la sphère, en supposant que $\Phi(\Phi(w)) = w$ et que l'équation $\Phi(w) = w$ possède exactement deux solutions.

de la famille F et la borne supérieure de son module n'est atteinte que pour les fonctions univalentes qui répresentent ce cercle sur un domaine dont la frontière est située à distance finie. La transformation φ (w) change ce domaine en son complément et laisse invariable sa frontière.

En posant $a_0 = o$ et $\varphi(w)=w^{-1}$ on obtient le cas considéré par M. Bieberbach et Eilenberg. Pour voir que le coefficient a_1 est uniformément borné pour toutes les fonctions de la famille F choisissons des valeurs a et b quelconques, telles pourtant que $a \neq b$, $\varphi(a) \neq a$, $\varphi(a) \neq b$, $\varphi(b) \neq a$, $\varphi(b) \neq b$. Toute fonction de la famille F ne prend pas une au moins des valeurs a et $\varphi(a)$ et de même une telle fonction ne prend pas une au moins des valeurs b et $\varphi(b)$, il en résulte ,d'après un critère connu que la famille F est normale [4]). a_0 étant fixe les fonctions de cette famille sont donc uniformément bornées dans tout cercle $|z| < r < 1$ [5]) et par suite a_1 est uniformément borné. Du fait que la famille est normale il résulte aussi immédiatement qu'il existe des fonctions $f^*(z)$ de la famille pour lesquelles la borne supérieure de $|a_1|$ est atteinte. Nous allons étudier la surface de Riemann S^* (étendue sur la sphère de Riemann) sur laquelle $f^*(z)$ répresente le cercle unité. Commençons par rappeler la notion d'une surface de Riemann portée par une autre [6]). Une surface de Riemann s est dite portée par une surface de Riemann S si à chaque point p de s on peut faire correspondre un point P de S sur lequel p se projette, cette correspondance étant continue et telle qu'à une courbe fermée décrite par p sur s corresponde une courbe fermée décrite par P sur S; on suppose d'ailleurs que pour certaines positions de p, p est confondu avec P. Cela posé, „le principe de Lindelöf" affirme que si $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots$ et $f(z) = a_0 + b_1 z + \ldots$ sont holomorphes dans le cercle $|z| < 1$ et le répresentent sur les surfaces s et S respectivement on a $|a_1| \leq |b_1|$ l'égalité n'ayant lieu que si s coïncide avec S [7]).

Remarquons que la fonction $\varphi(w)$ fait correspondre à un cercle de centre w et de rayon arbitrairement petit un domaine contenant un petit cercle de centre $\varphi(w)$ et de rayon positif, il en résulte qu'il existe sur la sphère de Riemann des cercles non recouverts par S^*, tel est par exemple le cas d'un cercle de centre ∞ et de rayon suffisamment petit, car $f^*(z)$ prend toutes les valeurs d'un cercle de centre a_0 et $\varphi(\infty) = a_0$ par définition. Il n'est pas possible que la projection sur la sphère de Riemann d'une portion de la frontière de S^*, tracée sur un de ses feuillets, coïncide avec la projection des points intérieurs des autres feuillets: en effet,

4) cf. P. Montel Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications *Paris, Gauthier Villars, 1937, p. 61.*

5) loc. cit. sous 7) p. 35.

6) cf. p. ex. G. Julia Principes géométriques d'analyse, 2 partie, *Paris, Gauthier Villars, 1932, p. 69-70.*

7) loc. cit. sous 6) pp. 70 — 79.

en déplaçant un peu cette portion de frontière dans un sens convenable, nous pourrions construire une surface Σ^* par laquelle S^* serait portée, en désignant par $\varphi^*(z)$ la fonction correspondante nous aurions, en vertu du principe de Lindelöf, $|(f^{*\prime}(a_0)| < |\varphi^{*\prime}(a_0)|$; or la fonction $\varphi^*(z)$ appartient à la famille F nous aboutissons donc, en tenant compte de la définition de $f^*(z)$, à une contradiction.

Nous allons voir maintenant que le domaine D^* de la sphère de Riemann sur lequel se projette la surface S^* est simplement connexe. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi; désignons par G_i des composantes connexes du complément du domaine D^* (leur nombre est fini ou infini mais toujours supérieur à 1) ,la surface S^* couvre alors une infinité de fois chaque point de D^* (autrement la frontière de S^* ne serait pas connexe). A priori certaines composantes G_i ou leurs portions peuvent se réduire à des lignes (coupures) ou à des points, cependant en supprimant ces lignes ou ces points on obtiendrait une surface de Riemann Σ par laquelle S serait portée. Soit $\varphi(z)=a_0+b_1z+ \ldots$ la fonction qui répresente le cercle $|z|<1$ sur Σ, cette fonction appartient à la famille F. En appliquant le principe de Lindelöf on obtiendrait l'inégalité $|f^{*\prime}(a_0)|<|\varphi'(a_0)|$ ce qui est impossible. Ainsi donc toutes les G_i sont des domaines (fermés) qui contiennent des points intérieurs ,il y a au plus une infinité dénombrable des domaines G_i $(i=1,2 \ldots)$ Comme $f^*(z)$ prend la valeur a_0 elle ne prend ni la valeur $\varphi(a_0)$ ni les valeurs qui en diffèrent assez peu, donc $\varphi(a_0)$ appartient à l'un des domaines G_i ,nous appelerons G^* ce domaine particulier.

La fonction $\varphi(w)$ transforme D^* en un domaine $\triangle^*$, nous allons étudier la frontière de ce domaine. Comme nous l'avons déjà remarqué la transformation $\varphi(w)$ fait correspondre à un cercle de centre w et de rayon arbitrairement petit un domaine contenant un petit cercle de centre $\varphi(w)$, il en résulte que si w est un point intérieur de D^* $\varphi(w)$ ne peut appartenir à la frontière du $\triangle^*$. Nous allons voir maintenant que *la transformation $\varphi(w)$ fait correspondre à la frontière de tout domaine G_i la frontière de G^**. Soit w_0 un point accessible de la frontière de G_i, on peut joindre ce point au point a_0 par une courbe de Jordan située à l'intérieur de D^*. Si w décrit cette courbe de a_0 vers w_0 le point $\varphi(w)$ reste en dehors de D^* et par conséquent à l'intérieur de G^*. Cependant le point $\varphi(w_0)$ ne peut être situé à l'intérieur de G^* car autrement on pourrait étendre un peu la surface S^* dans le voisinage de w_0, sans que la fonction $f_0^*(z)$ ainsi modifiée cesse d'appartenir à la famille F, il résulte d'autre part du principe de Lindelöf que le module $|a_1|$ serait augmenté ce qui n'est pas possible. $\varphi(w_0)$ appartient donc bien à la frontière de G^*, or les poins accessibles sont denses sur la frontière de G_i [8]), le résultat

8) loc. cit sous 4) p. 9.

s'étend donc à un point w_0 quelconque de la frontière de G_i. Le point $\varphi(a_0)$ appartenant à G^* nous constatons que le domaine Δ^* est identique avec le domaine G^* qui est simplement connexe. Nous aboutissons maintenant à une contradiction: il est impossible qu'à un domaine D^* multiplement connexe une transformation topologique fasse correspondre un domaine simplement connexe. Ainsi la surface S^* est portée par D^* simplement connexe, en appliquant encore une fois le principe de Lindelöf on voit que S^* coïncide avec D^* et que par suite $f^*(z)$ est *univalente*. Les autres assertions de l'énoncé résultent aussi immédiatement de la démonstration précédente.

Streszczenie.

Bieberbach udowodnił, że jeśli $f(z) = a_1 z + \ldots$ jest holomorficzną i jednolistną w kole $|z| < 1$ i jeśli $f(z_1) f(z_2) \neq 1$, o ile tylko $|z_1| < 1$ i $|z_2| < 1$, to jest $|a_1| \leqq 1$. Eilenberg zwrócił uwagę na to, żė w tym twierdzeniu można skreślić wyraz „jednolistną". Wykazuję że uwaga ta może być uogólniona w sposób następujący: Niech $\varphi(w)$ przekształca topologicznie kulę Riemanna na nią samą. Jeśli $\varphi(\infty) = a_0$ to rozważam rodzinę funkcyj:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots$$

holomorficznych w kole $|z| < 1$ i takich, że jeśli $f(z)$ przybiera w tym kole wartość w to nie przybiera wartości $\varphi(w)$. Współczynnik a_1 jest jednostajnie ograniczony dla wszystkich funkcyj tej rodziny, a osiąga górny kres modułu tylko w przypadku gdy $f(z)$ jest jednolistną i odwzorowuje $|z| < 1$ na obszar którego granica nie zmienia się przez przekształcenie $\varphi(w)$.