ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA

VOL. I. Nr 1 SECTIO A 1946

Z Seminarium Matematycznego I Wydz. Przyrodn. U. M. C. S.
Kierownik: prof. dr Mieczysław Biernacki

Mieczysław Biernacki

Sur le moyennes de module des fonctions holomorphes

O średnich modułu funkcyj holomorficznych

§ 1. En partant d'une formule de S. Mandelbrojt [1]) je vais établir dans ce travail une formule générale (cf. le théorème I du § 2) qui exprime l'intégrale:

$$I_\lambda(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^\lambda d\theta$$

d'une fonction holomorphe dans le cercle $|z|\leq r$ à l'aide des nombres de zéros des fonctions $f(z)-a$ [2]). Le reste du travail est consacré aux diverses applications de la formule en question. Au § 3 j'en déduis une démonstration nouvelle d'un théorème connu de Littlewood [3]): „Si $f(z)$ et $F(z)$ sont holomorphes dans le cercle $|z|<1$ et si $f(z)$ est subordonnée à $F(z)$ dans ce cercle on a pour tout $r<1$ et pour tout $\lambda>0$:

---

1) Quelques remarques sur les fonctions univalentes. *Bull. des Sci. Mat. (2), 58 (1934)*. Ce résultat a été aussi établi par Prawitz (*Ark. Mat. Astr. 20 A, Nr. 6. 1927)*.

2) La démonstration de cette formule est reproduite dans mon travail: „Sur les fonctions en moyenne multivalentes" § 6. La même formule a ete établie sous la forme différente par D. C. Spencer (*Journ. Lond. M. S. 15, 1940)*.

3) *Proc. Lond. Mat. Soc. 2, 23, 1924*. Plus tard F. Riesz a démontré le théorème en utilisant la théorie des fonctions sousharmoniques (ibidem). Les deux démonstrations sont reproduites dans le livre de G. Julia *Principes géométriques d'analyse, 2 partie, Paris, Gauthier-Villars, 1932, p. 108-112 et 120*.

$$I_{\lambda}(r,f) \leq I_{\lambda}(r,F)$$

l'égalité n'ayant lieu que si $f(z) = F(e^{i\psi}z)$ où ψ est réel". Au § 4 j'obtiens une proposition analogue à celle de M. Littlewood. Enfin au § 5 je donne une expression de $I_{\lambda}(r,f)$ à l'aide de la caractéristisque $T(r,f)$ de M. Nevanlinna.

§ 2. Supposons que $f(z)$ soit holomorphe et ne s'annule pas sur la circonférence $|z| = r$. Si λ est réel et si $z = re^{i\theta}$ et $f(z) = Re^{i\varphi}$ on obtient, en utilisant des formules de Cauchy — Riemann, les égalités:

$$\frac{\partial}{\partial r}|f|^{\lambda} = \lambda |f|^{\lambda} \cdot \frac{\partial \log}{\partial r}|f| = \lambda |f|^{\lambda} \cdot \frac{1}{r}\frac{\partial \arg}{\partial \theta} f$$

d'où il résulte que l'on a:

$$(1) \qquad \frac{d}{dr}\int_{0}^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^{\lambda} d\theta = \frac{\lambda}{r}\int_{C} R^{\lambda} d\varphi$$

où C est la courbe décrite par le point d'affixe $f(z)$ lorsque z décrit la circonférence $|z| = r$ dans le sens direct. La formule (1) a été établie et appliquée par S. Mandelbrojt (loc. cit. sous [1])). Supposons que C ne ne soit pas tangente à une demi-droite $\varphi =$ const. et que cette demi-droite ne contienne pas des points multiples de C (il n'y a qu'un nombre fini des demi-droites $\varphi =$ const. qui ne remplissent pas ces conditions). Désignons par $M_1 M_2 \ldots M_n$ des points d'intersection de la demi-droite en question avec C et posons $\varepsilon_i = +1\ (-1)$ si un point qui décrit C lorsque θ croit, traverse en M_i la demi-droite en tournant dans le sens positif (négatif) autour de l'origine. En posant encore $OM_i = R_i$ (O est l'origine) on a d'après (1):

$$\frac{d}{dr}\int_{0}^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^{\lambda} d\theta = \frac{\lambda}{r}\int_{0}^{2\pi}\left(\varepsilon_1 R_1^{\lambda} + \ldots + \varepsilon_n R_n^{\lambda}\right) d\varphi \quad |n = n(\varphi)|$$

Supposons maintenant que $f(z)$ soit holomorphe dans le cercle $|z| \leq r$ et désignons par $n_r(\varrho, \varphi)$ le nombre des racines de l'équation $f(z) = \varrho e^{i\varphi}$ qui sont contenues dans le cercle $|z| \leq r$[1]). D'après le „principe de l'argument", si $w = \varrho e^{i\varphi}$ et si $f(z)$ décrit la courbe C dans le sens qui correspond aux θ croissants $n_r(\varrho, \varphi)$ est égal à la variation de l'argument de $f(z) - w$, donc si $R_{i-1} < \varrho < R_i$ ce nombre est précisément égal à $\varepsilon_{i+1} + \varepsilon_i + \ldots + \varepsilon_n$ et si $o < \varrho < R_1$ il est égal à $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n$, enfin si $\varrho > R_n$ on a $n_r(\varrho, \varphi) = o$. Or nous avons:

4) Chaque racine est comptée avec son ordre de multiplicité.

$$\varepsilon_1 R_1^\lambda + \ldots + \varepsilon_n R_n^\lambda = (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n) R_1^\lambda + (\varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_n)(R_2^\lambda - R_1^\lambda) + \ldots$$

$$\ldots + (\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n)\left(R_{n-1}^\lambda - R_{n-2}^\lambda\right) + \varepsilon_n \left(R_n^\lambda - R_{n-1}^\lambda\right)$$

donc nous obtenons l'énoncé suivant:

THÉORÈME I. *Supposons que $f(z)$ soit holomorphe dans le cercle $|z| \leq r$. En désignant par $n_r(\varrho, \varphi)$ le nombre des racines de l'équation $f(z) = \varrho e^{i\varphi}$ contenues dans le cercle $|z| \leq r$ et par $M(r,\varphi)$ le maximum de $|f(z)|$ lorsque $|z| = r$ et $\arg f(z) = \varphi$ on a l'égalité:*

$$(2) \quad \frac{d}{dr}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\lambda d\theta = \frac{\lambda^2}{r}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{M(r,\varphi)} n_r(\varrho,\varphi)\varrho^{\lambda-1} d\varrho \quad (\lambda \text{ réel})$$

Il est clair que l'on peut remplacer dans cette égalité $M(r,\varphi)$ par ∞ [c'est ce que fait M. Spencer dans l'article cité sous [4])].

§ 3. Avant de passer à la démonstration du théorème de M. Littlewood je vais rappeler quelques définitions. On dit [5]) qu'une *surface de Riemann s est portée par une surface de Riemann S* si entre points *p* de *s* et points *P* de *S* on peut établir une correspondance continue telle que, à tout point *p* de *s*, corresponde un point *P* et un seul de *S* sur lequel il se projette, de manière qu' à toute courbe fermée sur s, décrite par p, corresponde une courbe fermée sur *S* décrite par le point *P* correspondant et si, pour certaines positions de *p*,son homologue *P* est confondu avec *p*. En particulier, si *s* est contenue dans *S*, elle est portée par *S* tandis que la réciproque n'est pas toujours exacte.

Soit maintenant *D* un domaine simplement connexe, z_0 un point intérieur de *D* que nous appelerons centre du domaine et $F(z)$ une fonction holomorphe dans ce domaine; nous dirons[6]) qu'une fonction $f(z)$, également holomorphe dans *D*, est *subordonnée* à $F(z)$ dans *D* si:

1° Elle prend au point z_0 la même valeur que $F(z)$ $[f(z_0) = F(z_0)]$,

2° L'aire de Riemann *s*, en laquelle la fonction $f(z)$ transforme *D*, peut être considérée comme portée par l'aire de Riemann *S* en laquelle $F(z)$ transforme *D*.

Nous supposerons dans la suite que *D* est un cercle $|z| < r$ et que le point z_0 est à l'origine, dans ces conditions on démontre sans peine [7]/ que pour que $f(z)$ soit subordonnée à $F(z)$ dans le cercle $|z| < r$ (le centre étant à l'origine) il faut et il suffit qu'elle soit de la forme: $f(z) = F[\bar{\omega}(z)]$ où $\bar{\omega}(z)$ est une fonction holomorphe et inférieure à r en module dans

5) G. Julia, loc. cit. p. 67-70.

6) G. Julia, loc. cit. p. 104.

7) cf par exemple G. Julia, loc. cit. p. 105-106.

le cercle $|z|<r$ et nulle à l'origine (c. à. d. qui satisfait aux conditions du lemme de Schwarz). On en déduit aisément que si $f(z)$ est subordonnée à $F(z)$ dans le cercle $|z|<r$ elle lui est subordonnée dans tout cercle $|z|<r'$ où $r'<r$.

Supposons maintenant que $f(z)$ soit subordonnée à $F(z)$ dans le cercle $|z|<1$, le centre z_0 étant à l'origine; nous établirons d'abord l'inégalité:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|F(re^{i\theta})|\, d\theta \qquad (r<1) \tag{3}$$

Désignons par $n_t(o)$ le nombre des zéros de $f(z)$ contenus dans le cercle $|z|\leq t$ (chaque zéro étant compté avec son ordre de multiplicité). En supposant que $f(o) \neq o$ on a la formule de Jensen:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\, d\theta = \log|f(o)| + \int_0^{r} \frac{n^t(o)}{t}\, dt. \tag{4}$$

Si $F(z)$ et donc aussi $f(z)$ ne s'annulent pas dans le cercle $|z|<r$ il résulte de (4) et de l'égalité analogue relative à la fonction $F(z)$ que l'inégalité (3) a bien lieu et cela avec le signe d'égalité. Dans le cas général[8]) désignons par k l'ordre de multiciplité de l'origine si celle-ci est un zéro de $F(z)$, sinon posons $k=o$; soient $z_1, z_2 \ldots . z_q$ d'autres zéros de $F(z)$ contenus dans le cercle $|z|<r$. Posons:

$$M(z) = \frac{z^k}{r^k}\prod_{i=1}^{q}\frac{r(z-z_i)}{r^2-\bar{z}_i z}$$

($\bar{z}_i$ est le nombre complexe conjugué de z_i). Sur la circonférence $|z|=r$ on a $|M(z)|=1$ et pour $|z|<r$ on a $|M(z)|<1$. La fonction $M(z)$ possède dans le cercle $|z|<r$ les mêmes zéros que $F(z)$ avec le même ordre de multiplicité, et l'on peut écrire

$$F(z) = M(z)\,\psi(z)$$

$\psi(z)$ étant holomorphe dans le cercle $|z|<r$ et ne s'y annulant pas. On a donc, puisque $f(z) = F[\bar{\omega}(z)]$ [$\bar{\omega}(o)=o$, $|\bar{\omega}(z)|<1$ dans le cercle $|z|<1$, donc aussi $|\bar{\omega}(z)|<r$ lorsque $|z|<r$]:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|F[\bar{\omega}(re^{i\theta})]|\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|M[\bar{\omega}(re^{i\theta})]|\, d\theta$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\psi[\bar{\omega}(re^{i\theta})]|\, d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\psi[\bar{\omega}(re^{i\theta})]|\, d\theta = \log\psi|(o)| =$$

---

8) Cette partie ed la démonstration est analogue aux considérations de M. Littlewood.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\psi(re^{i\theta})|\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|M(re^{i\theta})\psi(re^{i\theta})|\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|F(re^{i\theta})|\,d\theta,$$

c. à. d. l'inégalité (3). Il résulte de la démonstration que cette inégalité ne se réduit pas à l'égalité que si l'on a $|\tilde\omega(z)|=r$ pour $|z|=r$ ce qui ne peut avoir lieu que si $\tilde\omega(z)=e^{i\varphi}z$, φ étant réel.

Désignons par $N_t(\varrho,\varphi)$ le nombre des racines de l'équation $F(z)=\varrho e^{i\varphi}$ qui sont contenues dans le cercle $|z|\leqq t$, Il est clair que si $f(z)$ est subordonnée à $F(z)$ la fonction $[f(z)-a]$ est, quelque soit a, subordonnée à $[F(z)-a]$. En remplaçant donc dans l'inégalité (3) $f(z)$ par $f(z)-\varrho e^{i\varphi}$ et $F(z)$ par $F(z)-\varrho e^{i\varphi}$ et en tenant compte de la formule de Jensen on obtient l'inégalité:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^r\frac{n_t(\varrho,\varphi)}{t}\,dt\leqq\frac{1}{2\pi}\int_0^r\frac{N_t(\varrho,\varphi)}{t}\,dt\qquad[\varrho e^{i\varphi}\neq f(o)=F(o)]\tag{5}$$

le signe d'égalité ne pouvant avoir lieu que dans les deux cas suivants: 1⁰ on a $n_t(\varrho,\varphi)=o$ et $N_t(\varrho,\varphi)=o$ pour $|t|<r$; 2⁰ on a $f(z)=F(e^{i\varphi}z)$, φ étant réel.

Intégrons maintenant l'égalité (2) du théorème I entre des limites o et r, en y remplaçant d'abord, lorsque $\arg f(o)=\varphi_0$ les limites o et 2π par φ_0 et $\varphi_0+2\pi$[9], il vient:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^{\lambda}\,d\theta=|f(o)|^{\lambda}+\lambda^2\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi}d\varphi\int_0^{\infty}\varrho^{\lambda-1}\,d\varrho\int_0^r\frac{n_t(\varrho,\varphi)}{t}\,dt\quad(\lambda>o)$$

Cette égalité ainsi que l'égalité obtenue en y remplaçant f par F et n par N entrainent immédiament, en tenant compte de (5), l'énoncé de M. Littlewood. Il résulte de ce qui précède que le signe d'égalité ne peut avoir lieu dans cet énoncé que si l'on a $f(z)=F(e^{i\psi}z)$, ψ étant réel.

§ 4. Désignons maintenant par $l_r(\varrho)$ la somme des longueurs des arcs de la circonférence $|z|=\varrho$ qui sont couverts par les valeurs de la fonction $f(z)$ holomorphe dans le cercle $|z|\leqq r$ lorsque z décrit ce cercle (un arc recouvert k fois est compté k fois). On évidamment:

$$\int_0^{2\pi}n_r(\varrho,\varphi)\,d\varphi=\frac{l_r(\varrho)}{\varrho}$$

donc la formule /2/ peut s'écrire:

$$\frac{d}{dr}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^{\lambda}\,d\theta=\frac{\lambda^2}{r}\int_0^{\infty}l_r(\varrho)\,\varrho^{\lambda-2}\,d\varrho\tag{2}$$

9) Lorsque $f(o)=o$, on peut poser $\varphi_0=o$.

On en déduit immédiatement l'énoncé suivant:

Théoréme II. *Considérons les fonctions $f(z)$ et $F(z)$ holomorphes dans le cercle $|z| \leq r$ et supposons que la somme des longueurs des arcs de la circonférence $|w| = \varrho$ qui sont couverts par les valeurs de $f(z)$ lorsque z décrit le cercle $|z| \leq r$ ne surpasse pas — quelque soit ϱ — la somme analogue relative à la fonction $F(z)$ (un arc couvert k fois est compté k fois) Dans ces conditions on a:*

$$(6) \qquad \frac{d}{dr}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^{\lambda}\, d\theta \leq \frac{d}{dr}\int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^{\lambda}\, d\theta$$

l'égalité n'ayant lieu que si les sommes des longueurs des arcs sont égales pour toute valeur de ϱ.

En particulier, si $|f(o)| \leq |F(o)|$ et si les conditions précedentes, dans lesquelles on a remplacé r par t, sont remplies pour tout $o < t \leq r$, on a:

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^{\lambda}\, d\theta \leq \int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^{\lambda}\, d\theta$$

l'égalité n'ayant lieu que si les sommes de longueurs des arcs sont égales pour tout ϱ et pour tout t $(o < t \leq r)$.

Il est clair que dans le cas particulier où $f(z)$ et $F(z)$ sont *univalentes* dans le cercle $|z| < 1$ l'inégalité (6) (avec $r < 1$) constitue une précision du théorème de M. Littlewood.

§ 5. La fonction caractéristique $T(r,f)$ de R. Nevanlinna d'une fonction $f(z)$ méromorphe dans le cercle $|z| < R$ $/R \leq \infty/$ est définie par la formule

$$T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |f(re^{i\theta})|\, d\theta + \int_0^{r} \frac{n_t(\infty)}{t}\, dt$$

où $\overset{+}{\log}\, u = \log u$ lorsque $u \geq 1$ et $\overset{+}{\log}\, u = o$ lorsque $u < 1$ et où $n_t(\infty)$ est le nombre des pôles contenus dans le cercle $|z| \leq t$ (chaque pôle étant compté avec son ordre de multiplicité). On démontre[10]) que si a, b, c et d sont des constantes, telles que $ad - bc \neq o$ et si $\varphi(z) = \dfrac{af + b}{cf + d}$ les caractéristiques $T(r, \varphi)$ et $T(r, f)$ ne différent que d'une quantité qui reste bornée lorsque $r \rightarrow$ R. H. Cartan a établi[11]) une formule intéresante: en suposant que l'origine ne soit pas un pôle, elle s'écrit:

---

10) p. ex. R. Nevanlinna, *Eindeutige analytische Funktionen Berlin, J. Springer, 1936, p. 162,*

11) *H. Cartan, Sur la fonction* de croissance attachée à une fonction méromorphe de deux variables et ses applications aux fonctions méromorphes *C. R. Acad. Sc. Paris 189, 1929.* cf. aussi R. Nevanlinna, loc. cit. p. 168 - 169.

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \frac{l_t(1)}{t} dt + \overset{+}{\log} |f(o)|$$

$l_t/1/$ ayant la même signification qu'au § 4. En appliquant cette formule à la fonction $\varrho^{-1} f(z)$ $(\varrho > o)$ on obtient la suivante:

(7) $$T\left(r, \frac{f}{\varrho}\right) = \frac{1}{2\pi\varrho} \int_0^r \frac{l_t(\varrho)}{t} dt + \overset{+}{\log} \left|\frac{f(o)}{\varrho}\right|.$$

En intégrant l'égalité /2/ du § 4 entre les limites o et r et en tenant compte de /7/ on obtient l'égalité:

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\lambda = 2\pi |f(o)|^\lambda + 2\pi\lambda^2 \int_0^\infty \varrho^{\lambda-1} \left[T\left(r, \frac{f}{\varrho}\right) - \overset{+}{\log} \left|\frac{f(o)}{\varrho}\right|\right] d\varrho$$

d'où en effectuant les calculs on obtient le

Théorème III. *Si $f(z)$ est holomorphe dans le cercle $|z| \leq r$ et si $T(r,f)$ est la caractéristique de R. Nevanlinna on a l'égalité:*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\lambda d\theta = \lambda^2 \int_0^\infty \varrho^{\lambda-1} T\left(r, \frac{f}{\varrho}\right) d\varrho \qquad (\lambda > o)$$

Voici une application du théorème III, Si $f(z)$ est holomorphe dans le cercle $|z| \leq r$ on a l'inégalité:

$$\frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta \leq \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})| d\theta$$

donc d'après le théorème III, où l'on a posé $\lambda = 1$ on a:

$$\frac{d}{dr} \left| \int_0^\infty T\left(r, \frac{f}{\varrho}\right) d\varrho \right| \leq \int_0^\infty T\left(r, \frac{f'}{\varrho}\right) d\varrho$$

Remarque. *$T(r, \varrho^{-1} f)$ est une fonction décroissante et convexe de ϱ*[12].

La première propriété est évidente. Pour établir la seconde désignons par α_1 $(o \leq \alpha_1 < \ldots < \alpha_n < 2\pi)$ les valeurs de θ pour lesquelles on a $|f(re^{i\theta})| = \varrho$ et supposons que l'on ait $|f(re^{i\theta})| > \varrho$ das les intervalles $\alpha_1 < \theta < \alpha_2$, $\alpha_3 < \theta < \alpha_4$, ... $\alpha_{n-1} < \theta < \alpha_n$ par exemple. En désignant par E l'ensemble de ces intervalles et en supposant que r soit fixe on trouve de suite que

$$\frac{\partial T(r, \varrho^{-1} f)}{\partial \varrho} = -\frac{1}{\varrho} \int_E d\theta$$

12) lorsque ϱ dépasse le maximum de $|f(re^{i\theta})|$, $T(r, \varrho^{-1} f)$ est évidemment une constante.

En différentiant encore une fois on trouve ensuite que l'on a:

$$\frac{\partial^2 T(r, \varrho^{-1} f)}{\partial \varrho^2} = \frac{1}{\varrho^2} \int_E d\theta - \frac{1}{\varrho} \left[\frac{\partial(\alpha_2 - \alpha_1)}{\partial \varrho} + \dots + \frac{\partial(\alpha_n - \alpha_{n-1})}{\partial \varrho} \right]$$

Or tous les termes du crochet sont évidemment négatifs ou nuls, on a donc bien $\frac{\partial^2 T}{\partial \varrho^2} > 0$ et ceci établit la convexité de $T(r, \varrho^{-1} f)$.

S t r e s z c z e n i e

Podaję nowy dowód twierdzenia Littlewooda: Jeśli $f(z)$ i $F(z)$ są funkcjami holomorficznemi w kole $|z| < R$, $f(0) = F(0)$ a powierzchnia Riemanna funkcji f leży na takiejże powierzchni funkcji F to średnia modułu funkcji f na kole $|z| = r < R$ nie przekracza takiejże średniej funkcji F.

Otrzymuję również inne analogiczne twierdzenie, z którego wynika - w przypadku gdy f i F są jednolistne - zaostrzenie wyżej cytowanego twierdzenia Littlewooda.