

S. HAŁAS

O równaniu falowym — poglądowo

WSTĘP

Biegnącą falę sinusoidalną najłatwiej pokazać za pomocą szkolnego przyrządu — falownicy. W urządzeniu tym kulki, którymi są zakończone pionowe pręty, wprawia się w ruch drgający. Aby uzyskać efekt fali poruszającej się w dodatnim kierunku osi x , drgania kolejnych kulek muszą być opóźnione w fazie o stałą wartość równą k . Jeśli kulki są rozmieszczone w odstępach jednakowych, równych 1 cm , to $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, gdzie λ — długość fali.

Zatem jeśli pierwsza kulka drga zgodnie z równaniem

$$y = y_0 \sin \omega t, \quad (1)$$

to kulka odległa od pierwszej o $x\text{ cm}$ drga zgodnie z równaniem

$$y = y_0 \sin(\omega t - kx) = y_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{c}\right), \quad (2)$$

gdzie

$$c = \frac{\omega}{k} \quad (3)$$

jest prędkością fazową fali, tj. prędkością przesuwania się punktów o stałej fazie.

Łatwo się przekonać, że funkcja $y(t, x)$ dana równaniem (2) spełnia równanie

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (4)$$

zwane jednowymiarowym równaniem falowym.

Równanie (4) opisuje ruch falowy nie tylko wzdłuż prostej, ale również fale płaskie na płaszczyźnie i w przestrzeni 3-wymiarowej, biegnące w kierunku osi x .

Zauważmy, że równanie falowe spełnia nie tylko funkcja sinus (2), lecz każda funkcja o argumentie $\Theta = t \pm \frac{x}{c}$. Rzeczywiście, niech np.

$$\psi = f\left(t - \frac{x}{c}\right), \text{ to}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2},$$

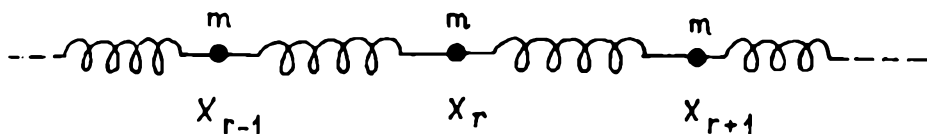
skąd natychmiast wynika równanie (4) dla funkcji $\psi(x, t)$. Naturalnym rozszerzeniem równania (4) jest trójwymiarowe równanie falowe dla funkcji $\psi(x, y, z, t)$:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \equiv c^2 \nabla^2 \psi, \quad (5)$$

tym równaniem będziemy się zajmować w dalszej części tego artykułu. Wyprowadzimy tutaj równanie (4) dla (1) ośrodka sprężystego, (2) elektrycznej linii dwuprzewodowej oraz (3) pola elektromagnetycznego w pustej przestrzeni. Tym samym znajdziemy prędkość fazową propagujących fal w wymienionych przypadkach. Przedtem jednak, jako bardziej przemawiające do wyobraźni, wyprowadzimy równania falowe dla układów dyskretnych. Nie będziemy tutaj zajmować się sposobami rozwiązywania równania falowego. Czytelnik zainteresowany tym zagadnieniem znajdzie opis różnych metod w ogólnie dostępnych podręcznikach [1–4], a bardziej szczegółowy — w podręczniku [5].

FALE W UKŁADZIE PUNKTÓW MATERIALNYCH

Rozważmy nieskończony szereg punktów materialnych o masie m każdy, rozłożonych równomiernie wzdłuż osi x i oddziałujących na siebie siłami sprężystymi. Na ryc. 1 zobrazowano to przez połączenie małych kulek jednakowymi bezmasowymi sprężynkami.



Ryc. 1. Fragment nieskończonej linii złożonej z punktów materialnych połączonych bezmasowymi sprężynkami

Niech odległość między punktami w stanie równowagi wynosi l . Rozważmy teraz siły działające na wyróżnioną kulkę r (Ryc. 1) przy naruszeniu stanu równowagi, tj. pojawiające się przy wychyleniu kulek sąsiednich i przy wychyleniu samej kulki r . W pierwszym przypadku kulka r jest w położeniu równowagi a kulki $r-1$ oraz $r+1$ są wychylone o x_{r-1} i x_{r+1} , odpowiednio. W wyniku rozciągnięcia lub ściśnięcia sprężynek dołączonych do kulki r na kulkę będzie działać siła wypadkowa

$$F = k(x_{r+1} + x_{r-1}). \quad (6)$$

W drugim przypadku, gdy sąsiednie kulki pozostają w położeniach równowagi, siła wypadkowa działająca na kulkę r będzie wynosiła

$$F = -k(x_r + x_r). \quad (7)$$

Zakładamy, że wszystkie wychylenia z położenia równowagi x_{r-1} , x_r oraz x_{r+1} są małe w porównaniu z odległością l oraz że znamy współczynnik sprężystości k . W przypadku ogólnym, w dowolnym momencie t , w którym wystąpią wychylenia x_{r-1} , x_r , x_{r+1} , na kulkę r działa siła wypadkowa

$$F = k(x_{r+1} + x_{r-1}) - k(x_r + x_r).$$

Korzystając teraz z II zasady dynamiki otrzymamy następujące równanie ruchu dla dowolnie wybranej kulki r

$$m \frac{d^2 x_r}{dt^2} = k[(x_{r+1} - x_r) - (x_r - x_{r-1})]. \quad (8)$$

Równanie to jest matematycznym zapisem faktu, że siła działająca na kulkę r jest wprost proporcjonalna do drugiej różnicy (różnicy różnic) jej wychylenia z położenia równowagi.

Równanie (8) łatwo przekształcić do postaci równania falowego (4). Oznaczamy drugą różnicę wychylenia kulki r przez $\Delta^2 x_r$ i dzielimy przez $(\Delta x)^2 \equiv l^2$:

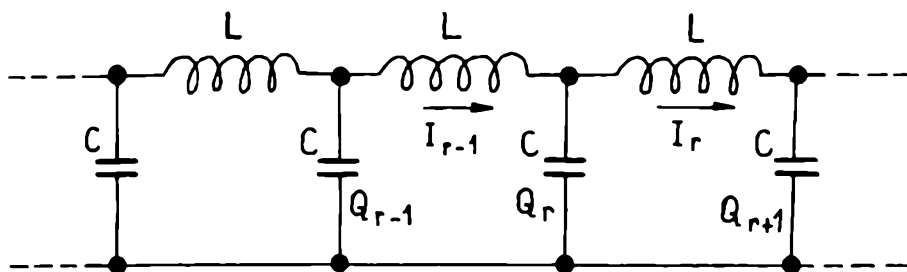
$$\frac{m}{l^2} \frac{d^2 x_r}{dt^2} = k \frac{\Delta^2 x_r}{(\Delta x)^2}. \quad (9)$$

W tym równaniu celowo wprowadziliśmy oznaczenie Δx , zamiast wprowadzonego wyżej l , aby równanie (9) przyjęło postać zbliżoną do postaci równania (4). Ponieważ kulka r została wybrana dowolnie, to zamiast x_r możemy wprowadzić symbol ψ , który będzie się odnosić do dowolnej kulki. Jednakże tak rozumiane ψ jest już funkcją dwóch zmiennych — położenia i czasu. Pochodną względem czasu należy zapisać jako pochodną cząstkową. Zatem równanie (9) przyjmie następującą postać

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{kl}{\mu} \frac{\Delta^2 \psi}{(\Delta x)^2}, \quad (10)$$

gdzie $\mu = m/l$ jest liniową gęstością masy układu. Z równania tego widać, że prędkość fazowa propagacji fali sprężystej w układzie przedstawionym na ryc. 1 wynosi

$$c = \sqrt{\frac{kl}{\mu}}. \quad (11)$$

Ryc. 2. Fragment nieskończenie długiej linii złożonej z elementów LC FALE W LINII LC

Rozważmy teraz nieskończoną linię zbudowaną z jednakowych elementów L i C — indukcyjności i pojemności — połączonych jak na ryc. 2.

Oznaczamy ładunek na dowolnie wybranym kondensatorze przez Q_r , a przez Q_{r-1} i Q_{r+1} — ładunki na kondensatorach sąsiednich. Stan równowagi tego układu mamy wtedy, gdy przez indukcyjność nie płyną prądy, a ładunki (lub napięcia $= Q/C$) na wszystkich pojemnościach są jednakowe. Jakiegokolwiek odchylenie od stanu równowagi oznacza wygenerowanie prądów w poszczególnych odcinkach obwodu oraz sił elektromotorycznych indukcji na elementach L .

Z pierwszego prawa Kirchhoffa mamy następujące wyrażenie na prąd ładowania (lub rozładowania) wybranego kondensatora

$$\frac{dQ_r}{dt} = I_r - I_{r-1}. \quad (12)$$

Z drugiego prawa Kirchhoffa, zastosowanego dla sąsiadujących oczek, wynika

$$-L \frac{dI_{r-1}}{dt} = \frac{Q_r}{C} - \frac{Q_{r-1}}{C}, \quad (13)$$

$$-L \frac{dI_r}{dt} = \frac{Q_{r+1}}{C} - \frac{Q_r}{C}. \quad (14)$$

Odejmując stronami równania (13) i (14), otrzymujemy

$$L \frac{d}{dt} (I_r - I_{r-1}) = \frac{1}{C} [(Q_r - Q_{r-1}) - (Q_{r+1} - Q_r)]. \quad (15)$$

Korzystając z równania (12) i zapisując drugą różnicę ładunku w postaci $\Delta^2 Q_r$, otrzymamy

$$L \frac{d^2 Q_r}{dt^2} = \frac{1}{C} \Delta^2 Q_r. \quad (16)$$

Aby otrzymanemu równaniu nadać kształt równania falowego, dzielimy je przez $(\Delta x)^2$, gdzie Δx oznacza odległość między kolejnymi elementami równoważnej linii nieskończonej. W celu uwolnienia się od wskaźnika r postępujemy podobnie,

jak podczas przekształcania równania (9), zastępując $\frac{d^2}{dx^2}$ przez $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Ostatecznie równanie (14) przekształca się więc do postaci

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = \frac{1}{L_0 C_0} \frac{\Delta^2 Q}{(\Delta x)^2}, \quad (17)$$

gdzie $L_0 = \Delta L / \Delta x$ i $C_0 = \Delta C / \Delta x$ są wartościami indukcyjności i pojemności przypadającymi na jednostkę długości linii.

Porównując to równanie z równaniem falowym (4) widzimy, że prędkość fazowa przemieszczania się zmian ładunków na kondensatorach wynosi

$$c = 1 / \sqrt{L_0 C_0}. \quad (18)$$

FALE W PRĘCIE SPRĘŻYSTYM I ELEKTRYCZNEJ LINII DWUPRZEWODOWEJ

W pierwszym przypadku mamy do czynienia z ośrodkiem ciągłym, w którym masy i źródła sił sprężystych są rozmieszczone równomiernie wzdłuż osi x . W drugim przypadku dotyczy to pojemności i indukcyjności. W obydwu przypadkach łatwo przejść do granicy przy $\Delta x \rightarrow 0$ i zapisać równania (10) i (17) w postaci równania (4)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

gdzie

$$c^2 = \frac{1}{C_0 L_0} \quad (18a)$$

w przypadku linii dwuprzewodowej, a

$$c^2 = \frac{E}{\rho} \quad (19)$$

w przypadku sprężystego pręta.

We wzorze (19) E oznacza moduł Younga, a ρ gęstość materiału pręta. Wzór ten otrzymuje się z przekształcenia wzoru (11)

$$c^2 = \frac{kl}{\mu} = \frac{k\Delta l}{\mu\Delta l/l}.$$

Ale $k\Delta l$ jest siłą sprężystą rozciągającą (lub sprężającą) odcinek l o Δl , która zgodnie z prawem Hooke'a wynosi

$$ES \frac{\Delta l}{l},$$

gdzie S — pole przekroju pręta, E — moduł Younga. Zatem $c^2 = \frac{ES}{\mu} = \frac{ES}{\rho S}$, co należało wykazać.

FALE W CIECZACH I GAZACH

Jeśli zamiast sprężystego pręta rozważymy rurę wypełnioną cieczą lub gazem, to zamiast wzoru (19) otrzymamy

$$c^2 = \frac{k\Delta l}{\mu\Delta l/l} = \frac{F}{\rho S\Delta l/l} = \frac{\Delta P}{\rho\Delta V/V}. \quad (20)$$

Ale w stałej temperaturze stosunek nadwyżki ciśnienia do niewielkiej względnej zmiany objętości jest wielkością stałą dla danej cieczy lub gazu (moduł ściśliwości). W przypadku gazu, z równania adiabaty mamy

$$\frac{\Delta P}{P} = \kappa \frac{\Delta V}{V}, \text{ gdzie } \kappa = \frac{C_p}{C_v} \quad (21)$$

jest stosunkiem ciepła właściwego przy stałym ciśnieniu do tegoż ciepła przy stałej objętości ($\kappa = 1,67$; $1,40$ i $1,33$ dla gazów atomowych, dwuatomowych i wieloatomowych, odpowiednio).

Zatem wzór (20) przyjmie postać

$$c^2 = \frac{\kappa P}{\rho}. \quad (22)$$

Temperaturowa zależność stosunku P/ρ jest następująca

$$\frac{P}{\rho} = \frac{PV}{m} = \frac{P_0 V_0}{m} \left(1 + \frac{1}{273}t\right) = \frac{P_0}{\rho_0} \left(1 + \frac{1}{273}t\right).$$

FALE ELEKTROMAGNETYCZNE W PRÓŻNI

Równanie falowe dla pola $\vec{E}$ lub $\vec{H}$ otrzymuje się bezpośrednio z równań Maxwella dla próżni

$$\text{rot}\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (23)$$

$$\text{rot}\vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (24)$$

oraz następującego twierdzenia matematycznego udowodnionego w dodatku A:

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{E}) = \text{grad}(\text{div}\vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}. \quad (25)$$

Biorąc pod uwagę, że w próżni $\text{div}\vec{E} = 0$ ze względu na brak ładunków wytwarzających pole potencjalne, mamy

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E}. \quad (26)$$

Z równań (23) i (24), eliminując $\vec{H}$, otrzymujemy

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{E}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot}\vec{H} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \quad (27)$$

Porównując otrzymane wyniki na $\text{rot}(\text{rot}\vec{E})$ otrzymujemy równanie falowe dla pola $\vec{E}$ w przestrzeni

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla^2 \vec{E}, \quad (28)$$

które w przypadku jednowymiarowym sprowadza się do postaci równania (4):

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2}. \quad (29)$$

Z tego równania wynika, że prędkość fal elektromagnetycznych w próżni wynosi

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}. \quad (30)$$

FALA RADIOWA W JONOSFERZE

W rozrzedzonym gazie zjonizowanym fala elektromagnetyczna częstości radiowej pobudza do drgań elektrony. Przy częstościach rzędu megaherców jony, ze względu na ich dużą masę, można uważać za nieruchome. Obliczymy najpierw gęstość prądu elektronowego j i wprowadzimy tę wartość do równania Maxwella.

Pod wpływem działania płaskiej fali elektromagnetycznej (biegnącej wzdłuż osi x)

$$E = E_0 \sin(\omega t - kx), \quad (31)$$

$$H = H_0 \sin(\omega t - kx), \quad (32)$$

na elektron działa siła

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = e E_0 \sin(\omega t - kx), \quad (33)$$

gdzie m i e oznaczają masę i ładunek elektronu. Z tego równania ruchu dla elektronu otrzymamy wyrażenie na prędkość elektronu

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{e E_0}{m\omega} \cos(\omega t - kx) = -\frac{e}{m\omega^2} \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (34)$$

Zatem gęstość prądu elektronowego wynosi

$$j = Ne \frac{dx}{dt} = -\frac{Ne^2}{m\omega^2} \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (35)$$

W tym równaniu przez N oznaczyliśmy liczbę elektronów w jednostce objętości, czyli ich koncentrację. Równanie (35) będzie bardziej ogólne, jeśli przepiszemy je w postaci wektorowej:

$$\vec{j} = -\frac{Ne^2}{m\omega^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (35a)$$

Równania Maxwella przyjmują teraz postać

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \varepsilon \left(1 - \frac{Ne^2}{m\omega^2}\right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (36)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (37)$$

Eliminujemy wektor $\vec{E}$ z pierwszego równania biorąc rotację z obu stron tego równania

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \varepsilon \left(1 - \frac{Ne^2}{m\omega^2\varepsilon}\right) \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{E} = \varepsilon \left(1 - \frac{Ne^2}{m\omega^2\varepsilon}\right) \frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right). \quad (38)$$

Z drugiej strony, zgodnie ze wzorem wyprowadzonym w dodatku A, mamy

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H}. \quad (39)$$

Biorąc pod uwagę, że $\nabla \cdot \vec{H} = 0$, z porównania prawych stron równań (38) i (39) wynika

$$-\varepsilon \mu \left(1 - \frac{Ne^2}{m\omega^2\varepsilon}\right) \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\nabla^2 \vec{H}. \quad (40)$$

Stąd dla fali poruszającej się w kierunku osi x

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon \mu \left(1 - \frac{Ne^2}{m\omega^2\varepsilon}\right)} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}. \quad (41)$$

Z tego równania wynika, że prędkość fazowa fali jest zależna od częstotliwości

$$v_f = 1/\sqrt{\varepsilon \mu \left(1 - \frac{Ne^2}{m\omega^2\varepsilon}\right)} \cong \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{Ne^2}{m\omega^2\varepsilon}}}, \quad (42)$$

gdzie $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ jest prędkością światła w próżni, przy czym v_f jest większa od prędkości światła w próżni. Ponieważ $v_f = \frac{\omega}{k}$ zależy tutaj od ω , przeto ośrodek wykazuje dyspersję. W takim ośrodku prędkość grupowa $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ (patrz dodatek B) różni się od prędkości fazowej. Ze wzoru (42) mamy

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{Ne^2}{m\omega^2\varepsilon_0}}, \quad (43)$$

skąd

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}} = c \sqrt{1 - \frac{Ne^2}{m\omega^2\varepsilon_0}}. \quad (44)$$

Warto zauważyć, że $v_g \leq c$ oraz $v_f v_g = c^2$. Jeśli fala pada na ośrodek o stopniowo wzrastającej koncentracji elektronów, to jej prędkość grupowa będzie maleć. Przy spełnieniu warunku

$$\frac{Ne^2}{m\omega^2 \varepsilon_0} = 1, \quad (45)$$

będzie ona równa zero, fala wysłana pionowo w górę natrafiając na warstwy zjonizowanego powietrza ulega obiciu od tej warstwy, dla której jest spełniony warunek (45). Podstawiając do tego wzoru wartości stałych fizycznych, otrzymujemy następujący wzór na częstość graniczną:

$$\nu_{gr} = 9.0\sqrt{N}, \quad [\nu] = \text{Hz}, \quad [N] = \text{m}^{-3}. \quad (46)$$

Wzór ten służy do sondowania jonosfery przy użyciu fal radiowych o zmienianej częstości.

Przy ukośnym wejściu wiązki fal radiowych do warstw zjonizowanych trajektoria wiązki ulega zakrzywieniu podobnie jak „promień” świetlny wprowadzony do warstw o zmieniającym się współczynnikiem załamania.

FALE MATERII

De Broglie wykazał, że z poruszającą się cząstką materialną związana jest fala o długości

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{p/\hbar}, \quad (47)$$

gdzie p — pęd cząstki, $\hbar$ — stała Plancka.

Funkcja falowa $\Phi(x, y, z, t)$ musi spełniać ogólne równanie falowe (5)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 \Phi, \quad (48)$$

gdzie $v = \omega/k$ jest prędkością fazową.

W przypadku, gdy cząstka porusza się w polu sił, w którym jej energia potencjalna jest $V(x, y, z)$, a całkowita energia cząstki

$$E = E_{\text{kin}} + V(x, y, z) \quad (49)$$

jest ujemna, rozwiązania równania falowego poszukuje się w postaci fali stojącej, tzn.

$$\phi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) \sin \omega t. \quad (50)$$

W tym przypadku mamy bowiem do czynienia z ruchem stacjonarnym cząstki w polu sił, jak to ma miejsce np. w przypadku ruchu elektronu dookoła dodatnio naładowanego protonu. Podstawiając tę funkcję do równania falowego (48), otrzymujemy równanie dla funkcji ψ niezależnej od czasu:

$$-\omega^2 \psi = v^2 \nabla^2 \psi, \quad \text{skąd } \nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0. \quad (51)$$

Ze wzoru (47) wynika

$$k^2 = \frac{p^2}{\hbar^2} = \frac{2mE_{\text{kin}}}{\hbar^2} = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V). \quad (52)$$

Podstawiając ten wynik do równania (52), otrzymujemy stacjonarne równanie Schroedingera dla cząstki w polu o energii potencjalnej $V(x, y, z)$

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m(E - V)}{\hbar^2} \psi = 0. \quad (53)$$

Zgodnie z interpretacją podaną przez Borna w r. 1926 wartość $|\psi(x, y, z)|^2$ ma znaczenie gęstości prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w punkcie (x, y, z) .

LITERATURA

- [1] Szczeniowski S., *Fizyka doświadczalna*, cz. I, *Mechanika i akustyka*, PWN, Warszawa 1972.
- [2] Piekara A. H., *Elektryczność i magnetyzm*, PWN, Warszawa 1970.
- [3] Crawford F. C., *Fale*, PWN, Warszawa 1972.
- [4] Januszajtis A., *Fizyka dla politechnik*, t. III, *Fale*, PWN, Warszawa 1981.
- [5] Tichonow A. N., Samarski A. A., *Równania fizyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1963.

DODATEK A

Równania $\text{rot}(\text{rot}\vec{E}) = \text{grad}(\text{div}\vec{E}) - \nabla^2\vec{E}$ dowodzi się następująco, korzystając z oznaczeń rachunku wektorowego

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \vec{E} &= \nabla \times \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} & \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} & \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} &= \nabla \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) - \nabla^2 \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dokonując w otrzymanej równości redukcji wyrazów identycznych stwierdzamy słuszność twierdzenia.

DODATEK B

Wzór na prędkość grupową, czyli na prędkość z jaką przemieszcza się grupa fal („paczka falowa”) najprościej wyprowadza się dla nakładających się dwu fal sinusoidalnych o jednakowych amplitudach, lecz o niewiele różniących się liczbach falowych k i k' . Równanie fali wypadkowej

$$A \sin(\omega t - kx) + A \sin(\omega' t - k'x)$$

daje się przedstawić w postaci wyrażenia (według znanego wzoru trygonometrycznego na sumę sinusów dwu kątów):

$$2A \sin\left(\frac{\omega + \omega'}{2}t - \frac{k + k'}{2}x\right) \cos\left(\frac{\omega - \omega'}{2}t - \frac{k - k'}{2}x\right).$$

Wyrażenie to możemy interpretować jako falę biegnącą z prędkością fazową $\frac{\omega + \omega'}{k + k'} \cong \frac{\omega}{k}$, lecz o modulowanej wolno zmieniającej się amplitudzie.

$$2A \cos\left(\frac{\omega - \omega'}{2}t - \frac{k - k'}{2}x\right)$$

Z wyrażenia tego widać, że fala amplitudy przemieszcza się z szybkością $\frac{\omega - \omega'}{k - k'} \cong \frac{d\omega}{dk}$. Widzimy więc, że prędkość grupowa może być równa fazowej, jeśli $\frac{d\omega}{dk} = \frac{\omega}{k}$ czyli gdy ω jest wprost proporcjonalna do k . Znaczy to tyle, że prędkość fazowa jest stała, niezależna od częstości (brak dyspersji).

